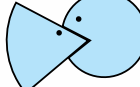


...مقدمه ناشر...

یک روز آقای  یک جایی نشسته بود تا یک قطعه به شکل  بیاید و او را کامل بکند؛ آخه راحت نمی‌توانست قل بخورد. خیلی صبر کرد ولی کسی نیامد. بعد راه افتاد و رفت دنبال قطعه گم‌شده‌اش تا کامل و خوشحال بشود. بعد رسید به ! دید که اصلن به درد هم نمی‌خورند و با هم جور نمی‌شوند، چون خیلی مربع بود. بعد رفت و رفت تا رسید به  و با  یکی شد و شدند ، ولی باز هم به هم نمی‌خورند؛ چون قطعه جدید خیلی ظریف بود.

باز هم رفت و رفت تا رسید به  و بعد با هم شدند ، ولی این دفعه هم اصلن نمی‌توانست قل بخورد. او قل خوردن و سفر را خیلی دوست داشت. خیلی سفر کرد، از کوه و اقیانوس هم گذشت و هی آواز می‌خواند:

«من دنبال قطعه گم‌شده خودم هستم!

تا کامل و خوشحال بشوم، تا بتوانم راحت قل بخورم و به هر جا بروم!»

یک وقت دید یک قطعه که کاملن با او جور بود سر راهش هست. آن قطعه که  بود هم او را دید و خیلی خوشحال شدند! آن‌ها با هم یکی شدند و  را تشکیل دادند و خیلی خوشحال با هم قل می‌خورند. او به هدفش رسیده بود ولی یک اتفاقی افتاده بود:

او دیگر نمی‌توانست آواز بخواند!!

کم‌کم غمگین شد، روز به روز لاغرتر و عصبی‌تر می‌شد!

کم‌کم باعث ناراحتی هم می‌شدند تا جایی که دیگر از هم جدا شدند.

قهرمان قصه ما باز هم سفر کرد، با کرم‌ها، با پروانه‌ها و گل‌های سرخ هم صحبت شد. راه دیگری یافت.

راه رفتن! آن‌قدر راه رفت تا کم‌کم گوشه‌های تیزش ساییده شد، شد  بعد  بعد  و بعد  . نقصی که در وجودش بود از بین رفت و خودش شد ، کامل! کامل! شاد شاد.

داستان «به دنبال قطعه گم‌شده» شیل سیلوراستاین بهترین قصه‌ای است که در عرم خوانده‌ام.

داستان زندگی ماست، رنج‌ها و مرارت‌ها، لذت‌ها و شادی‌ها، تلاش‌ها، در انتظار بودن‌ها، سراب‌های زندگی، واقعیت‌هایی که تلخی‌ها و شیرینی زندگی را می‌سازند. گریز از تنهایی و ترس و پناه‌بردن به دوست‌داشتن و دوست داشته شدن! این قصه را بخوانید و هم دیگر کتاب‌های آقای شیل را.

او می‌گوید خوشبختی در وجود خود ماست.

ممنونم از مؤلفان خوشنام و دانشمند این کتاب که اگر نبودند، قصه این کتاب به آخر نمی‌رسید. این کتاب را خیلی دوست دارم چون دوست‌داشتن، خیلی وقت‌ها دلیل هم نمی‌خواهد.

مراقب خودت باش!

...مقدمه مؤلف...

کتابی که شما عزیزان انتخاب کرده‌اید در واقع اولین کتاب جامع شامل مباحث ریاضی ۱، حسابان ۱ و حسابان ۲ بود؛ پس از استقبال همکاران گرامی و دانش‌آموزان عزیز و البته تغییراتی که در تست‌های کنکور سراسری دیده شد ما را بر آن داشت که تغییراتی در محتوای این کتاب هم داشته باشیم.

به جهت این‌که تست‌های تألیفی کتاب دوستداران زیادی دارد با حذف تست‌های کنکور سراسری، تست‌های تألیفی را بیشتر کردیم و تست‌های کنکور سراسری را به همراه تست‌های تألیفی دیگری در قالب آزمون‌های فصلی و جامع در یک فصل جمع‌آوری کردیم و توصیه می‌کنیم حتماً این آزمون‌ها را در برنامه درسی خودتان داشته باشید.

افتخار ما این است که رتبه‌های برتر کنکور سراسری این کتاب را انتخاب کرده‌اند و ما را از نقطه‌نظرات خود آگاه ساخته‌اند. برای استفاده بهتر از این کتاب به موارد زیر دقت کنید:

۱ مباحث مرتبط در قالب یک فصل و در صورت لزوم چند بخش تألیف شده است که بتوانید ارتباط بین مباحث دهم، یازدهم و دوازدهم را در یک موضوع خاص بهتر ببینید.

۲ در تألیف تست‌ها همواره مفاهیم کتاب، تمرین‌های کتاب و تست‌های کنکور سال‌های قبل در نظر گرفته شده است تا علاوه بر تسلط بر کتاب درسی بتوانیم بهترین بهره را برای رسیدن به رتبه‌های عالی در کنکور داشته باشیم.

۳ تست‌ها در هر فصل طوری تنظیم شده است که با درس‌نامه هم‌خوانی داشته و علاوه بر آن تمام مباحث را کامل پوشش دهد.

۴ نقطه قوت کتاب، جامع‌بودن درس‌نامه در عین خلاصه‌شدن آن است.

۵ تست‌ها در عین سادگی از یک ظرافت خاص برخوردار هستند که با یک چیدمان منطقی می‌تواند برای شما شیرینی درس را دوچندان کند.

تیم تألیف بر خود لازم می‌داند که از همکاری صمیمانه جناب آقای دکتر کمیل نصری و دوست عزیزمان ایمان سلیمان‌زاده تشکر فراوان داشته باشد.

ما خوب می‌دانیم، شما هم بدانید بدون کمک سرکار خانم فاطمه جان‌محمدی، ملیکا مهری، سرکار خانم هدی ملک‌پور، ویراستاران خوبمان و گروه تولید، هیچ‌گاه این کتاب حاضر نمی‌شد.

و تشکر می‌کنیم از دانش‌آموزان سخت‌کوشی که در بی‌غلط‌شدن این کتاب به ما کمک کردند: سورن حصار، مجید صادقی‌نژاد، امیرمهدی خدابنده و ابوالفضل پیلهور

...>فهرست<...

فصل اول: الگوها و دنباله‌ها	۷
فصل دوم: عبارت‌های جبری و اتحادها، رادیکال‌ها و توان‌های گویا	۲۱
فصل سوم: تعیین علامت و نامعادلات	۳۵
فصل چهارم: معادلات درجه دوم و سهمی	۴۲
فصل پنجم: معادلات گویا و گنگ	۵۵
فصل ششم: هندسهٔ مختصاتی	۶۱
فصل هفتم: قدرمطلق	۷۰
فصل هشتم: جزء صحیح	۷۸
فصل نهم: توابع نمایی و لگاریتمی	۸۵
فصل دهم: تابع	۹۸
فصل یازدهم: تقسیم چندجمله‌ای	۱۴۵
فصل دوازدهم: مثلثات	۱۵۱
فصل سیزدهم: حد و پیوستگی	۱۹۴
فصل چهاردهم: حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت	۲۲۱
فصل پانزدهم: مشتق	۲۴۲
فصل شانزدهم: کاربرد مشتق	۲۷۵
پاسخ‌نامهٔ تشریحی:	۳۱۵



آزمون‌های جامع را از طریق QR Code مقابل می‌توانید مشاهده و دریافت کنید.

تابع

تعداد تست: ۳۳۵

۱. تعریف تابع، دامنه و برد، تساوی توابع، انواع

توابع

(فصل پنجم سال دهم و فصل دوم سال یازدهم)

۲. تابع یک‌به‌یک و وارون

(فصل دوم سال یازدهم)

۳. چهار عمل اصلی روی توابع و ترکیب توابع

(فصل دوم سال یازدهم)

۴. تبدیلات روی نمودارها

(فصل پنجم سال دهم و فصل اول سال دوازدهم)

۵. توابع یکنوا

(فصل اول سال دوازدهم)



◀ **تابع (مقدمات و تعاریف)** ابتدا تابع را تعریف می‌کنیم سپس به ویژگی‌های تابع و انواع توابع می‌پردازیم.

مقدمه: اگر A و B دو مجموعه غیرتهی باشند، آن‌گاه وقتی رابطه‌ای از A به B تعریف می‌شود اعضای این رابطه به صورت زوج مرتب (a, b) خواهند بود که $a \in A$ و $b \in B$.

تعریف تابع: رابطه f از A به B به شرطی تابع است که دو شرط زیر هم‌زمان برقرار باشد:

۱ به هر عضو A ، عضوی از B را نسبت دهد.

۲ در f هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه اول یکسان دیده نشود.

به عبارتی $f: A \rightarrow B$ به شرطی بیانگر تابع است که به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را متناظر کند.

تست - اگر $f = \{(3, m^2), (m, 4), (3, m+2), (-2, m), (2, 1)\}$ بیانگر یک تابع باشد، m کدام است؟

$$m = -2 \quad (4)$$

$$m = 1, -2 \quad (3)$$

$$m = -1, 2 \quad (2)$$

$$m = -1 \quad (1)$$

پاسخ - گزینه «۱» قرار است هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه اول برابر نداشته باشند، پس:

$$\begin{aligned} (3, m^2) \in f &\Rightarrow m^2 = m+2 \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases} \\ (3, m+2) \in f &\Rightarrow \end{aligned}$$

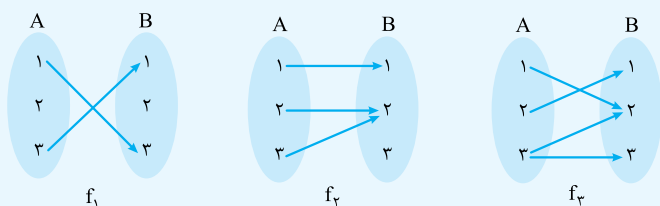
$$m = -1: f = \{(3, 1), (-1, 4), (-2, -1), (2, 1)\} \Rightarrow m = -1 \text{ قابل قبول است}$$

$$m = 2: f = \{(3, 4), (2, 4), (-2, 2), (2, 1)\} \Rightarrow m = 2 \text{ غیر قابل قبول است}$$

پس فقط $m = -1$ قابل قبول است.

تشخیص تابع از روی نمودار آن

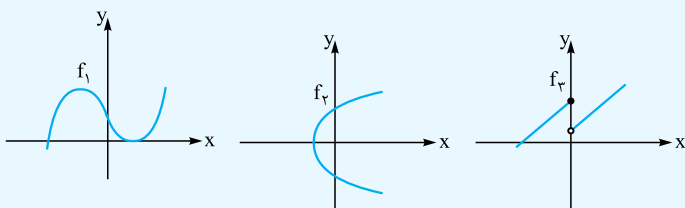
الف) نمودار پیکانی: یک نمودار پیکانی از مجموعه A به مجموعه B به شرطی یک تابع را تعریف می‌کند که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد.



در سه شکل فوق فقط f_3 بیانگر یک تابع از A به B است.

تذکره - لازم نیست در نمودار پیکانی به هر عضو B یک پیکان وارد شود.

ب) نمودار دستگاه مختصاتی: اگر نمودار یک رابطه در دستگاه مختصات رسم شده باشد به شرطی بیانگر یک تابع است که هر خط قائم $x = k$ نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



در سه شکل فوق فقط f_3 بیانگر یک تابع نیست.

تذکره - اگر A یک مجموعه m عضوی و B یک مجموعه n عضوی باشند، تعداد توابع تعریف شده از A به B برابر n^m است.

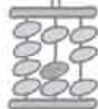
◀ **ضابطه تابع** تابع در واقع مانند یک ماشین عمل می‌کند که یک ورودی مانند x را دریافت می‌کند و یک خروجی یکتا مانند y را تحویل می‌دهد به طوری که اگر $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد آن‌گاه در این تابع داریم:

$$\left. \begin{aligned} (x, y) \in f \\ (x, z) \in f \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = z \text{ به عبارتی: } y = f(x) \text{ ضابطه } y = f(x) \text{ به شرطی تابع است که برای ورودی‌های یکسان الزاماً خروجی یکسان داشته باشد.}$$

$$\left. \begin{aligned} (x, y) \in f &\Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \\ (x, z) \in f &\Rightarrow z^2 = 4 - x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y^2 = z^2 \Rightarrow y = z \text{ مثلاً } f = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 4\} \text{ بیانگر یک تابع است، زیرا:}$$

$$\left. \begin{aligned} (x, y) \in g &\Rightarrow y^2 = x^2 - 9 \\ (x, z) \in g &\Rightarrow z^2 = x^2 - 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y^2 = z^2 \Rightarrow y = \pm z \text{ اما } g = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 - y^2 = 9\} \text{ بیانگر یک تابع نیست، زیرا:}$$

می‌توانیم از مثال $(5, 4) \in g$ و $(5, -4) \in g$ نیز به عنوان مثال نقض استفاده کنیم.



مدلسازی به کمک مفهوم تابع: در هر تابع یک متغیر ورودی داریم که معمولاً آن را متغیر مستقل و یک متغیر خروجی داریم که معمولاً آن را متغیر وابسته می‌گوییم. گاهی اوقات می‌خواهیم متغیر وابسته را برحسب متغیر مستقل تعریف کنیم و نوع وابستگی آن را معلوم کنیم. در این گونه موارد از ضابطه تابع در یک مدل ریاضی کمک می‌گیریم.

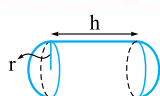
مثال در شکل زیر طول تمام نرده استفاده شده ۱۲۰ متر است. مساحت زمین را به عنوان تابع می‌خواهیم برحسب عرض مستطیل نمایش دهیم:



ابتدا عرض مستطیل بزرگ را به عنوان متغیر مستقل x تعریف می‌کنیم. در این صورت اگر طول آن را متغیر دیگری به نام y تعریف کنیم، داریم:

$$2y + 4x = 120 \Rightarrow y = 60 - 2x$$

مساحت مستطیل متغیر وابسته‌ای است که می‌خواهیم آن را برحسب x تعریف کنیم، پس داریم: $S = xy = x(60 - 2x) \Rightarrow S(x) = -2x^2 + 60x$



تست یک مخزن گاز از یک بخش استوانه‌ای شکل و دو نیم‌کره مطابق شکل روبه‌رو ساخته شده است. اگر ارتفاع

استوانه سه برابر شعاع نیم‌کره باشد و شعاع نیم‌کره برابر r باشد، حجم مخزن برحسب r برابر کدام تابع است؟

$$\frac{11}{3} \pi r^3 \quad (4)$$

$$\frac{13}{3} \pi r^3 \quad (3)$$

$$\frac{15}{3} \pi r^3 \quad (2)$$

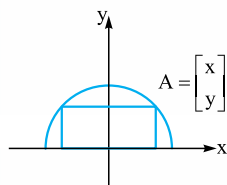
$$\frac{17}{3} \pi r^3 \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۳» اگر حجم مخزن V باشد، آن‌گاه:

حجم دو نیم‌کره + حجم استوانه $V =$

$$V = \pi r^2 \times h + 2 \times \frac{2}{3} \pi r^3 = \pi r^2 \times 3r + \frac{4}{3} \pi r^3 = \pi r^3 \left(3 + \frac{4}{3} \right) \Rightarrow V(r) = \frac{13}{3} \pi r^3$$

تست در شکل زیر، شعاع نیم‌دایره برابر ۴ است و مساحت مستطیل را به صورت تابعی برحسب طول نقطه A نوشته‌ایم. ضابطه تابع کدام است؟



$$S(x) = x\sqrt{16 - x^2} \quad (1)$$

$$S(x) = 2x\sqrt{16 - x^2} \quad (2)$$

$$S(x) = 2x\sqrt{4 - x} \quad (3)$$

$$S(x) = x\sqrt{4 - x} \quad (4)$$

پاسخ گزینه «۲» با توجه به آن‌که مرکز دایره $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ و شعاع آن ۴ است، ضابطه دایره $x^2 + y^2 = 4^2$ است، پس ضابطه نیم‌دایره

موردنظر $y = \sqrt{16 - x^2}$ است. لذا مختصات نقطه A به صورت $A = \begin{bmatrix} x \\ \sqrt{16 - x^2} \end{bmatrix}$ است. مساحت مستطیل به عنوان تابعی برحسب متغیر مستقل x به صورت مقابل تعریف می‌شود:

$$S = 2x_A \cdot y_A = 2x\sqrt{16 - x^2} \Rightarrow S(x) = 2x\sqrt{16 - x^2}$$

معادلات تابعی و مقادیر تابع: گاهی اوقات در ضابطه یا نمایش یک تابع لازم است مقدار تابع در یک نقطه را به دست آوریم و یا آن‌که در یافتن ضابطه تابع حل یک معادله برای یافتن ضابطه ضرورت پیدا می‌کند در این صورت می‌توانیم مقدار تابع یا ضابطه تابع را به عنوان مجهولی در یک معادله به دست آوریم. مثلاً $4x^2 + 2 = f(x) - 3f(2)$ است و می‌خواهیم $f(3)$ را به دست آوریم. ابتدا با قراردادن $x = 2$ داریم:

$$f(2) - 3f(2) = 18 \Rightarrow f(2) = -9$$

$$f(x) = 4x^2 + 2 - 27 \Rightarrow f(x) = 4x^2 - 25$$

پس به این ترتیب:

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = 4 \times 9 - 25 = 11 \Rightarrow f(3) = 11$$

تست به فرض آن‌که $xf(-x) + 3f(x) = 2x - 5$ مقدار $f(3)$ چه عددی است؟

$$-2 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$-3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۱» ابتدا به جای x اعداد $x = 3$ و $x = -3$ را قرار می‌دهیم و داریم:

$$\begin{aligned} x = 3 &\rightarrow \begin{cases} 3f(-3) + 3f(3) = 1 \\ -3f(3) + 3f(-3) = -11 \end{cases} \xrightarrow{\times(-1)} \begin{cases} 3f(-3) + 3f(3) = 1 \\ 3f(3) - 3f(-3) = +11 \end{cases} + \\ &\quad 6f(3) = 12 \Rightarrow f(3) = 2 \end{aligned}$$

در واقع با حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول مقدار $f(3)$ را به دست آوردیم.

تست هرگاه $f(x) - 2f(-\frac{1}{x}) = 3x - 2$ ، ضابطه $f(x)$ کدام است؟

(۱) $x + \frac{2}{x}$ (۲) $x - 2 - \frac{2}{x}$ (۳) $2 + \frac{2}{x} - x$ (۴) $x - 2 - \frac{1}{x}$

پاسخ گزینه «۳» اگر در معادله داده شده به جای x عبارت $-\frac{1}{x}$ را قرار دهیم، آن گاه:

$$f(x) - 2f(-\frac{1}{x}) = 3x - 2 \xrightarrow{x \rightarrow -\frac{1}{x}} f(-\frac{1}{x}) - 2f(x) = -\frac{3}{x} - 2$$

$$\begin{cases} f(x) - 2f(-\frac{1}{x}) = 3x - 2 \\ 2 \times [f(-\frac{1}{x}) - 2f(x) = -\frac{3}{x} - 2] \end{cases} \Rightarrow -3f(x) = 3x - 2 - \frac{6}{x} - 4 \Rightarrow -3f(x) = \frac{3x^2 - 6x - 6}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x} = -x + 2 + \frac{2}{x}$$

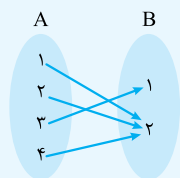
دامنه تعریف و برد تابع اگر $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد آن گاه دامنه تعریف تابع که با D_f نشان می دهیم همان A است به عبارتی $D_f = A$.

دامنه تعریف در توابع حقیقی بزرگترین زیرمجموعه از $\mathbb{R}$ می باشد که تابع به ازای اعضای آن تعریف شده باشد. مثلاً وقتی صرفاً می نویسیم $y = \sqrt{9 - x^2}$ و مجموعه های A و B را معرفی نمی کنیم، منظور از دامنه تعریف تابع زیرمجموعه ای از اعداد حقیقی است که ضابطه تابع در آن تعریف شده باشد. مثلاً در این مورد خاص $D_f = [-3, 3]$ خواهد بود. اما در مورد تابع $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ دامنه تعریف همان $\mathbb{R}$ است.

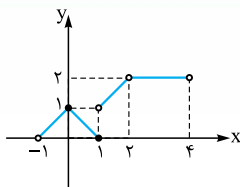
برد تابع: اگر $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد آن گاه برد f زیرمجموعه ای از B است که شامل مؤلفه های دوم در زوج های مرتب تابع f باشد، به عبارتی:

$f = \{(1, 2)(2, 2)(3, 1)(4, 2)\} \Rightarrow D_f = \{1, 2, 3, 4\}, R_f = \{1, 2\}$

$f: A \rightarrow B \Rightarrow D_f = A, R_f \subset B$



تست نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. بازه اعداد $D_f \cap R_f$ در کدام گزینه آمده است؟



- (۱) $(0, 2)$
(۲) $[0, 1)$
(۳) $(0, 4)$
(۴) $[0, 2)$

پاسخ گزینه «۴» برای یافتن دامنه تعریف تابع کافی است تابع را بر روی محور x ها تصویر کنیم. نقاطی که تصویر را شامل می شود دامنه تعریف تابع است، پس $D_f = (-1, 4) - \{2\}$ و به همین ترتیب تصویر تابع بر روی محور عرض ها، برد تابع است: $R_f = [0, 2] \Rightarrow D_f \cap R_f = [0, 2)$

۱ تعیین دامنه تعریف برخی توابع خاص: اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله ای باشند: $y = \frac{p(x)}{q(x)} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{x : q(x) = 0\}$

۲ $y = \sqrt[n]{p(x)} \Rightarrow \begin{cases} \text{زوج } n \Rightarrow D = \{x : p(x) \geq 0\} \\ \text{فرد } n \Rightarrow D = \mathbb{R} \end{cases}$ **۳** $y = \log_{q(x)} p(x) \Rightarrow D = \{x : p(x) > 0, q(x) > 0, q(x) \neq 1\}$

۴ $y = \tan p(x) \Rightarrow D = \{x : p(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ **۵** $y = \cot p(x) \Rightarrow D = \{x : p(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

مثال دامنه تعریف هر یک از توابع زیر را بیابید.

۱) $f(x) = \sqrt{4x - x^2} \log(x - 2)$

۲) $f(x) = \frac{\tan \pi x}{\sqrt{4 - x^2}}$

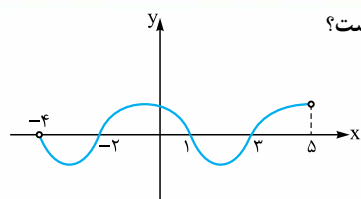
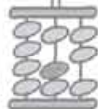
پاسخ ۱) برای آن که دامنه تعریف تابع را به دست آوریم کافی است تک تک اجزای تابع تعریف شده باشد:

$\begin{cases} 4x - x^2 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \\ x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{cases} \Rightarrow D_f = [0, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4]$

$4 - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-2, 2)$

۲) مانند حالت قبل ابتدا x را چنان می یابیم که هر یک از اجزاء تابع تعریف شده باشد.

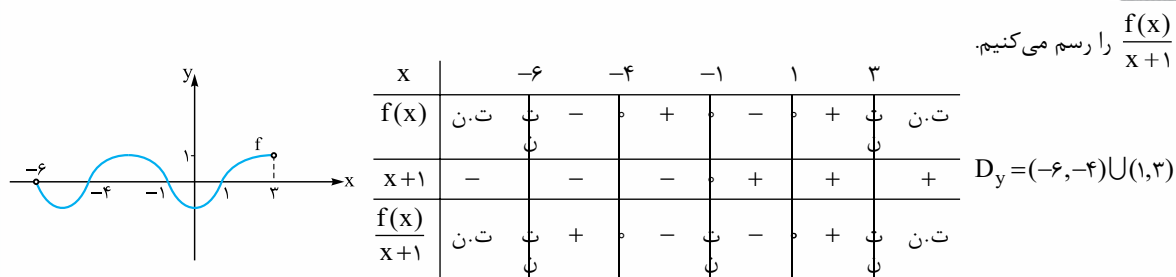
$\tan \pi x : \pi x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq k + \frac{1}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \quad D_f = (-2, 2) - \{\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}\}$



تست نمودار تابع $y = f(x-2)$ مطابق شکل مقابل است. دامنهٔ تعریف $y = \log \frac{f(x)}{x+1}$ کدام است؟

- (۱) $(3, 5) \cup (-4, -2)$
 (۲) $(-6, -4) \cup (1, 3)$
 (۳) $(-2, 1)$
 (۴) $(1, 3)$

پاسخ گزینهٔ «۲» اولاً برای رسم نمودار $f(x)$ کافی است شکل داده شده را دو واحد به سمت چپ انتقال دهیم. ثانیاً جدول تعیین علامت



تست هرگاه دامنهٔ تعریف تابع $f(x) = \sqrt{(2a-1)x^2 + 4ax + b-2}$ بازهٔ $[2, +\infty)$ باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

پاسخ گزینهٔ «۳» برای آن که $D_f = [2, +\infty)$ باشد باید عبارت زیر رادیکال از درجهٔ اول باشد. زیرا:

$$y = ax^2 + bx + c: \Delta < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & \\ \hline y & a \text{ موافق علامت} \end{array} \quad \Delta = 0 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & -\frac{b}{2a} \\ \hline y & a \text{ موافق} \end{array}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & x_1 & x_2 \\ \hline y & a \text{ موافق} & a \text{ مخالف} & a \text{ موافق} \end{array}$$

پس هیچ گاه جواب به صورت $[a, +\infty)$ نیست. به همین جهت $2a-1=0$ یعنی $a = \frac{1}{2}$.

عبارت زیر رادیکال به ازای $x=2$ برابر صفر است، پس:

$$f(x) = \sqrt{2x + b - 2} \Rightarrow 4 + b - 2 = 0 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{2x - 4} \Rightarrow ab = -1$$

روش‌های یافتن برد توابع:

۱ در تابع $y = f(x)$ ابتدا x را برحسب y پیدا می‌کنیم، سپس دامنهٔ ضابطهٔ به دست آمده را محاسبه می‌کنیم و آن را به عنوان برد f می‌پذیریم.

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x} \Rightarrow y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x} \Rightarrow xy = x^2 + 3x + 1$$

مثال

$$x^2 + (3-y)x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{y-3 \pm \sqrt{y^2 - 6y + 9 - 4}}{2} = \frac{y-3 \pm \sqrt{y^2 - 6y + 5}}{2}$$

$$y^2 - 6y + 5 \geq 0 \Rightarrow (y-1)(y-5) \geq 0 \Rightarrow y \geq 5 \text{ یا } y \leq 1 \Rightarrow R_f = (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$$

تست برد تابع $y = x + \sqrt{x^2 + 4}$ در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۲) $\mathbb{R}$ (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $(1, +\infty)$

پاسخ گزینهٔ «۳» ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم.

$$y - x = \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow y - x \geq 0 \Rightarrow y \geq x \Rightarrow y^2 + x^2 - 2xy = x^2 + 4 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 4}{2y}$$

ظاهراً باید تنها $y \neq 0$ را در نظر گرفت اما شرط $y \geq x$ را در کنار این شرط باید مد نظر داشته باشیم.

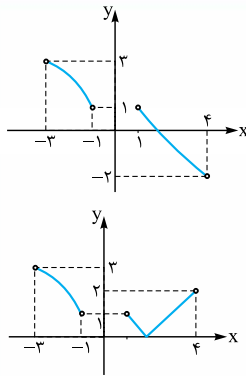
$$y \geq x \Rightarrow y \geq \frac{y^2 - 4}{2y} \Rightarrow y - \frac{y^2 - 4}{2y} \geq 0 \Rightarrow \frac{y^2 + 4}{2y} \geq 0 \Rightarrow y > 0.$$

پس $R_f = (0, +\infty)$.



گاهی می‌توانیم نمودار تابع را رسم کنیم و به کمک رسم، برد تابع را به دست آوریم.

تست - اگر نمودار f مطابق شکل مقابل باشد، برد تابع $y = 3 - 2|f(x)|$ در کدام گزینه آمده است؟



(1) $(-2, 4]$

(2) $[-3, 3]$

(3) $(-3, 3]$

(4) $(-2, 4)$

پاسخ - گزینه «۳» اولاً نمودار $y_1 = |f(x)|$ مطابق شکل مقابل است.

تصویر $|f|$ روی محور عرض‌ها بازه $[0, 3]$ است. پس:

$$R_{|f|} = [0, 3] \Rightarrow 0 \leq |f| < 3 \Rightarrow -6 < -2|f(x)| \leq 0$$

$$-3 < 3 - 2|f(x)| \leq 3 \Rightarrow R_y = (-3, 3]$$

۳ به نابرابری‌های زیر دقت کنید:

۱ $a > 0 : a + \frac{1}{a} \geq 2$

۲ $a < 0 : a + \frac{1}{a} \leq -2$

۳ $a, b > 0 : a + b \geq 2\sqrt{ab}$

از این دست نابرابری‌ها زیاد داریم که می‌توانیم به کمک آن‌ها برد توابع را به دست آوریم.

تست - برد تابع $y = x + 2 + \frac{4}{x-1}$ در کدام گزینه آمده است؟

(1) $[7, +\infty)$ (2) $[4, +\infty) \cup (-\infty, -4]$ (3) $[7, +\infty) \cup (-\infty, -1]$ (4) $[4, +\infty) \cup (-\infty, -1]$

$a, b > 0 : a + b \geq 2\sqrt{ab}$

$$x + 2 + \frac{4}{x-1} = x - 1 + \frac{4}{x-1} + 3$$

$$\left. \begin{array}{l} x-1 > 0 : x-1 + \frac{4}{x-1} \geq 2\sqrt{(x-1) \times \frac{4}{x-1}} \Rightarrow y \geq 7 \\ x-1 < 0 : x-1 + \frac{4}{x-1} \leq -2\sqrt{(x-1) \times \frac{4}{x-1}} \Rightarrow y \leq -1 \end{array} \right\} \Rightarrow R_f = [7, +\infty) \cup (-\infty, -1]$$

پاسخ - گزینه «۳» یکی از نابرابری‌های مهم آن است که:

بدین ترتیب اگر تابع را به صورت مقابل بنویسیم داریم:

تست - برد تابع $y = 3 - 2\sqrt{4x - x^2}$ در کدام گزینه آمده است؟

(1) $[1, 3]$ (2) $[-1, 3]$ (3) $[-4, 2]$ (4) $[-2, 4]$

پاسخ - گزینه «۲» با فرض آن که $4x - x^2 = 4 - (x-2)^2$ داریم:

$$(x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow 4 - (x-2)^2 \leq 4 \Rightarrow \sqrt{4 - (x-2)^2} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{4x - x^2} \leq 2 \Rightarrow -4 \leq -2\sqrt{4x - x^2} \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 3 - 2\sqrt{4x - x^2} \leq 3$$

پس $R_y = [-1, 3]$

تساوی دو تابع f و g را برابر گوییم هرگاه دو شرط زیر هم‌زمان برقرار باشند:

۲ برای هر x از دامنه آن‌ها مقادیر دو تابع با هم برابر باشند.

۱ $D_f = D_g$

تست - اگر $f(x) = x^2 + 2x + 4$ و $x \neq -k$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x + k} & x \neq -k \\ m & x = -k \end{cases}$ با هم برابر باشند، مقدار mk چه قدر است؟

(4) ۱۲

(3) ۲۴

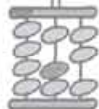
(2) -۱۲

(1) -۲۴

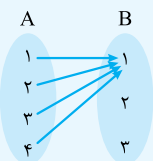
پاسخ - گزینه «۱» با توجه به آن که $D_f = \mathbb{R}$ پس باید $D_g = \mathbb{R}$ باشد؛ از طرفی $k = -2$ زیرا:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} & x \neq 2 \\ m & x = 2 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 & x \neq 2 \\ m & x = 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 12 \Rightarrow g(2) = 12 \Rightarrow m = 12, k = -2 \Rightarrow mk = -24$$



انواع تابع



(۱) تابع ثابت: $f: A \rightarrow B$ را تابع ثابت می‌گوییم هرگاه برد آن تک عضوی باشد. به عنوان مثال $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ یا $y = \sqrt{[x] + [-x]}$ مثال‌هایی از تابع ثابت هستند و یا تابع مقابل تابع ثابت $f(x) = 1$ است.

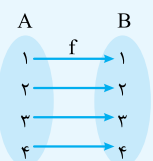
تست اگر $f(x) = \frac{mx+4}{x+m}$ تابعی ثابت باشد، $|f(m)|$ چه عددی است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) صفر

پاسخ گزینه «۲» برای آن که تابع ثابت باشد باید تغییرات x در مقدار آن بی‌تأثیر باشد، به عبارتی:

$$f(x) = \frac{m(x+\frac{4}{m})}{(x+m)} \Rightarrow x + \frac{4}{m} = x+m \Rightarrow \frac{4}{m} = m \Rightarrow m = \pm 2$$

$$\left. \begin{aligned} m=2: f(x) &= \frac{2x+4}{x+2} = 2 \Rightarrow f(2) = 2 \\ m=-2: f(x) &= \frac{-2x+4}{x-2} = -2 \Rightarrow f(-2) = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |f(m)| = 2$$



(۲) تابع همانی: $f: A \rightarrow B$ را تابع همانی می‌گوییم هرگاه $\forall x \in A: f(x) = x$ ؛ به عبارتی به هر عضو از مجموعه A خودش را نسبت می‌دهد.

تست اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی باشد، به طوری که $f(3) + 2g(1) = 8$ ، مقدار $2g(3) - f(2)$ چه عددی است؟

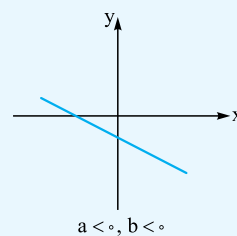
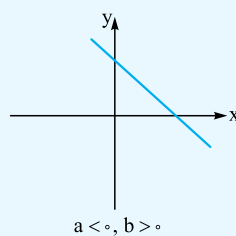
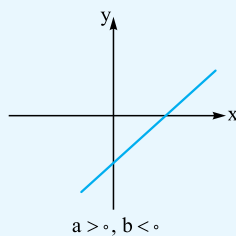
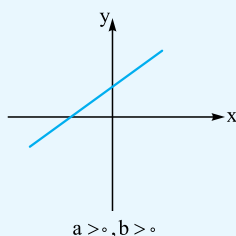
(۱) ۷ (۲) ۴ (۳) صفر (۴) ۸

پاسخ گزینه «۳» چون g تابعی همانی است پس $g(1) = 1$ لذا $f(3) = 6$ از طرفی f تابع ثابت است، پس:

$$\forall x \in D_f: f(x) = 6 \quad 2g(3) - f(2) = 2 \times 3 - 6 = 0$$

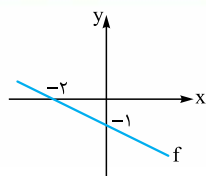
بدین شکل داریم:

(۳) تابع خطی: هر تابع با ضابطه $y = ax + b$ که $a, b \in \mathbb{R}$ را تابعی خطی می‌گوییم. در حالتی که $a = 0$ تابع خطی به تابع ثابت $y = b$ تبدیل می‌شود.



در حالتی که $a > 0$ ، تابع صعودی اکید و در حالتی که $a < 0$ ، تابع نزولی اکید خواهد بود.

تست اگر نمودار f شکل مقابل باشد، دامنه تعریف $y = \log(f(2x-3) - f(x-2))$ کدام است؟



- (۱) $(-\infty, 3)$
- (۲) $(2, +\infty)$
- (۳) $(-\infty, 1)$
- (۴) $(\frac{3}{2}, +\infty)$

پاسخ گزینه «۳» ابتدا ضابطه تابع خطی f را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} A(0, -1) &\in f \\ B(-2, 0) &\in f \\ f(x) &= ax + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ -2a + b = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$$

تابع $y = \log(g(x))$ به شرطی تعریف شده است که $g(x) > 0$ باشد. پس:

$$\begin{aligned} f(2x-3) - f(x-2) > 0 &\Rightarrow f(2x-3) > f(x-2) \Rightarrow -\frac{1}{2}(2x-3) - 1 > -\frac{1}{2}(x-2) - 1 \\ &\Rightarrow -x + \frac{3}{2} - 1 > -\frac{1}{2}x + 1 - 1 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow D_y = (-\infty, 1) \end{aligned}$$



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

تعریف تابع و ضابطه

۷۷۱- اگر $f = \{(2m+1, 3), (2, m+1), (7, 2), (2, m^2-5)\}$ تابع باشد، $f(m-1)$ چه عددی است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۱

۷۷۲- رابطه $R = \{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ به ازای کدام مقدار m یک تابع است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) هیچ مقدار m

۷۷۳- در کدام گزینه، y تابعی از x است؟

- (۱) $y^2 - xy = 0$ (۲) $|x-1| + |y+1| = 1$ (۳) $|x-1| + |y^2-1| = 0$ (۴) $x^2 + 2xy + y^2 = 0$

۷۷۴- در کدام گزینه، y تابعی از x است؟

- (۱) $y^2 = x$ (۲) $y^2 - y = x$ (۳) $y^2 + y^2 = x$ (۴) $y^2 + 3y^2 + 3y = x$

۷۷۵- در کدام رابطه زیر y تابعی از x است؟

- (۱) $x[y] = 1$ (۲) $y[x] = 1$ (۳) $[x] + [y] = 1$ (۴) $[x] - [y] = 1$

۷۷۶- در کدام گزینه، y تابعی از x است؟

- (۱) $[x] = [y]$ (۲) $\frac{|y|}{y} = \cos(\pi[x])$ (۳) $|y| = \sin(\frac{\pi x}{|x|})$ (۴) $|y| = \cos(\frac{2\pi x}{|x|})$

۷۷۷- اگر $f = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 + 2x - 12y = k\}$ یک تابع غیرتهی باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) -۱۰ (۳) ۴ (۴) -۴

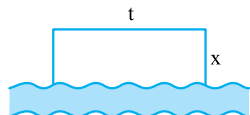
۷۷۸- در کدام رابطه زیر y تابعی از x است؟

- (۱) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ (۲) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = 1$ (۳) $\frac{|y|}{x} - x = 1$ (۴) $1 + y^2 = x + 2y$

۷۷۹- دو تابع f و g به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بیان شده‌اند. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

- (۱) $f \cup g$ (۲) $f \cap g$ (۳) $f - g$ (۴) $f \circ g$

۷۸۰- با ۴۸ متر طناب در کنار یک رودخانه، زمینی به شکل مستطیل جدا کرده‌ایم. اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم، مساحت مستطیل به صورت



$$y = 48x - 2x^2, 0 < x < 24 \quad (2)$$

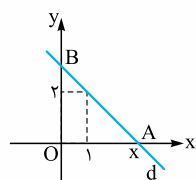
$$y = 48x - 2x^2, 0 < x \leq 16 \quad (4)$$

تابعی بر حسب x کدام است؟ ($x \leq t$)

$$y = 48x - x^2, 0 < x < 48 \quad (1)$$

$$y = 48x - x^2, 0 < x \leq 12 \quad (3)$$

۷۸۱- خط d مطابق شکل از نقطه $(1, 2)$ عبور می‌کند. اگر مساحت مثلث OAB تابعی از طول نقطه A باشد ضابطه این تابع کدام است؟



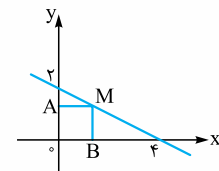
$$\frac{x^2}{x-1} \quad (2)$$

$$\frac{2x^2}{x+1} \quad (4)$$

$$\frac{2x^2}{x-1} \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{x+1} \quad (3)$$

۷۸۲- مساحت مستطیل بر حسب طول نقطه M در کدام گزینه آمده است؟



$$S = -\frac{1}{2}x^2 + 2x, 0 < x < 4 \quad (2)$$

$$S = \frac{1}{2}x^2 + 4x, 0 < x < 4 \quad (4)$$

$$S = -\frac{1}{2}x^2 + 4x, 0 < x < 4 \quad (1)$$

$$S = \frac{1}{2}x^2 - 2x, 0 < x < 4 \quad (3)$$

۷۸۳- مخروط قائم به شعاع قاعده r و ارتفاع h در کره‌ای به شعاع $R = 5$ محاط شده است، حجم مخروط را به صورت تابعی بر حسب h نوشته‌ایم، V

کدام است؟

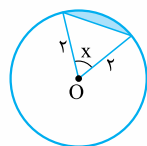
$$V = \frac{\pi}{3}h^2(5-h) \quad (4)$$

$$V = \frac{\pi}{3}h(5-h^2) \quad (3)$$

$$V = \frac{\pi}{3}h(25-h^2) \quad (2)$$

$$V = \frac{\pi}{3}h^2(10-h) \quad (1)$$

۷۸۴- مساحت ناحیه رنگ شده در شکل مقابل تابعی از زاویه x بر حسب رادیان است. ضابطه این تابع کدام است؟

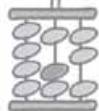


$$2(x - \sin x) \quad (2)$$

$$2x - \sin x \quad (4)$$

$$x - \sin x \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}(x - \sin x) \quad (3)$$

۷۸۵- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ چند تابع $f: A \rightarrow A$ وجود دارد که $f(1) = 1$ ؟

- (۱) 4^5 (۲) 5^4 (۳) 4^4 (۴) 5^5

۷۸۶- اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{a, b, c\}$ ، چند تابع مانند f از A به B می‌توان نوشت به طوری که $f(2) \neq b$ باشد؟

- (۱) ۳۶ (۲) ۹ (۳) ۵۴ (۴) ۲۷

۷۸۷- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $f: A \rightarrow A$ یک تابع باشد، تعداد توابعی مانند f که $a + f(a)$ عدد زوج باشد، چه تعداد است؟

- (۱) ۱۰۸ (۲) ۲۱۶ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۲۵

۷۸۸- تابع $f = \{(1, 0), (-1, 3), (2, 3), (3, -1)\}$ را در نظر بگیرید. حاصل ضرب جواب‌های معادله $f(x) = f(2 - f(x))$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) -۶ (۳) -۳ (۴) -۲

۷۸۹- اگر $f(x) = \sqrt{x+1} - 4$ ، مقدار $f(x-1) + f(2)$ چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۷۹۰- اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a & x \leq 2 \\ x^2 + 2x + 3 & x \geq 2 \end{cases}$ تابع باشد، حاصل $f(\sqrt{2}-1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{13}{4}$ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) ۵ (۴) ۴

۷۹۱- اگر $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ ، مقدار $f(\sqrt{10})$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $2\sqrt{10}$ (۳) $3\sqrt{10}$ (۴) $4\sqrt{10}$

۷۹۲- اگر $f(x) + xf(-x) = x + 3$ باشد، حاصل $f(3)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $-\frac{3}{5}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

۷۹۳- اگر $f(\frac{1}{x}) - 2f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ ، حاصل $f(2)$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{45}{4}$ (۲) $\frac{15}{4}$ (۳) $-\frac{15}{4}$ (۴) $\frac{45}{4}$

۷۹۴- به فرض آن که $f(x) - 3f(-\frac{1}{x}) = 6x + \frac{3}{x}$ مقدار $f(3)$ در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $\frac{7}{4}$ (۲) $-\frac{7}{4}$ (۳) $\frac{4}{7}$ (۴) $-\frac{4}{7}$

◀ دامنه توابع

۷۹۵- دامنه تعریف تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{4x - x^2} - 2\sqrt{2x - x^2} + 3$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

۷۹۶- اگر عبارت $\sqrt{\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2}} + \sqrt{2x - x^2}$ عدد حقیقی باشد، مجموعه مقادیر x در کدام بازه است؟

- (۱) $[\frac{2}{3}, 2]$ (۲) $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ (۳) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, 2]$ (۴) $[-\frac{2}{3}, 0) \cup (0, \frac{2}{3}]$

۷۹۷- دامنه تابع $y = \frac{1+x}{x^3 + 6x^2 + 9x}$ فقط دو عدد حقیقی را شامل نمی‌شود. a کدام است؟

- (۱) -۷ (۲) ۹ (۳) -۹ (۴) ۷

۷۹۸- دامنه تابع $y = \frac{x-1}{2x^2 + 8x + a}$ به صورت $\mathbb{R} - \{b\}$ می‌باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- (۱) ۱۵ (۲) ۵ (۳) ۱۰ (۴) ۶

۷۹۹- هرگاه دامنه تعریف $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ بازه $[2, +\infty)$ باشد به طوری که $f(6) = 4$ ، مقدار $f(11)$ چه عددی است؟

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) ۲

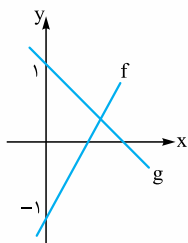
۸۰۰- دامنه تابع $y = \sqrt{mx^2 - 4x + 3} + m$ برابر $\mathbb{R}$ است. حدود m کدام است؟

- (۱) $m \leq -4, m \geq 1$ (۲) $m \geq 1$ (۳) $0 < m \leq 1$ (۴) $-4 \leq m \leq 1$





۸۰۱- نمودار f و g در شکل مقابل رسم شده است. اگر نقطه تلاقی آن‌ها $A(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ باشد. دامنه تعریف تابع $y = \sqrt{f(x)g(x)}$ کدام است؟



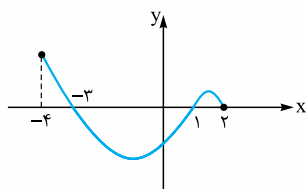
$$(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}] \quad (2)$$

$$[\frac{1}{3}, \frac{1}{6}] \quad (1)$$

$$[\frac{1}{12}, \frac{1}{6}] \quad (4)$$

$$[\frac{1}{6}, \frac{1}{3}] \quad (3)$$

۸۰۲- شکل روبه‌رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



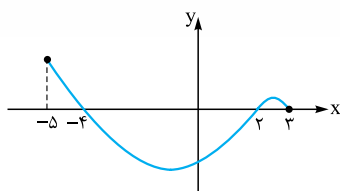
$$[0, 2] \quad (1)$$

$$[-3, 2] \quad (2)$$

$$[-4, -3] \cup [1, 2] \quad (3)$$

$$[-3, 0] \cup [1, 2] \quad (4)$$

۸۰۳- اگر نمودار f شکل مقابل باشد، دامنه $y = \sqrt{\frac{x-1}{f(x)}}$ در کدام گزینه آمده است؟



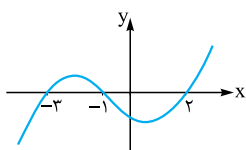
$$[1, 2] \cup (-5, -4] \quad (1)$$

$$(2, 3) \cup (-5, -4] \quad (2)$$

$$(2, 3) \cup (-4, 1] \quad (3)$$

$$(-4, 2) \quad (4)$$

۸۰۴- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x)$ است. دامنه تابع غیر نقطه‌ای $\sqrt{(x+1)f(x)}$ ، کدام است؟



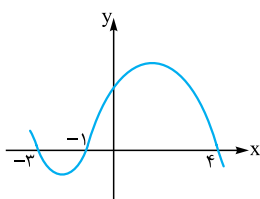
$$[-1, +\infty) \quad (2)$$

$$[-3, 2] \quad (1)$$

$$\mathbb{R} - (-3, 2) \quad (4)$$

$$(-\infty, -1] \quad (3)$$

۸۰۵- شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x-2)$ است، دامنه تابع با ضابطه $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



$$[-1, 1] \cup [0, 6] \quad (1)$$

$$[-3, 1] \cup [0, 2] \quad (2)$$

$$[-5, -3] \cup [-1, 2] \quad (3)$$

$$[-5, -3] \cup [0, 2] \quad (4)$$

۸۰۶- دامنه تعریف $f(x) = \sqrt{2|x| - |x+1|}$ کدام است؟

$$[1, +\infty) \quad (4)$$

$$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \quad (3)$$

$$[\frac{1}{2}, +\infty) \quad (2)$$

$$[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \quad (1)$$

۸۰۷- دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2 - \log(3-x)}$ در کدام گزینه آمده است؟

$$(-\infty, 3) \quad (4)$$

$$[-97, 3) \quad (3)$$

$$[-103, 3) \quad (2)$$

$$(-\infty, 103) \quad (1)$$

۸۰۸- دامنه تعریف $f(x) = \log_7(1 - \log(x-2))$ در کدام گزینه آمده است؟

$$(2, 8) \quad (4)$$

$$(2, 4) \quad (3)$$

$$(2, 12) \quad (2)$$

$$(2, 10) \quad (1)$$

۸۰۹- دامنه تابع $y = \log_{(b-x)}(x-a)$ به صورت $\{c\} - (2, 4)$ می‌باشد. حاصل $a+b+c$ کدام است؟

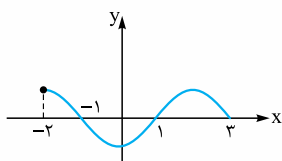
$$3 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$7 \quad (2)$$

$$9 \quad (1)$$

۸۱۰- نمودار f شکل مقابل است. دامنه تعریف $y = \log(|x|f(x))$ در کدام گزینه آمده است؟



$$(-1, 0) \quad (2)$$

$$(-2, -1) \cup (1, 3) \quad (1)$$

$$(0, 3) \quad (4)$$

$$(-1, 0) \cup (1, 3) \quad (3)$$

۸۱۱- دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2+4}{2x^2+ax+b}$ به صورت $\mathbb{R} - \{n\}$ است. اگر دامنه تابع $y = \log \frac{x+a}{b-x}$ شامل ۵ عدد صحیح باشد، مقدار طبیعی n کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

◀ تساوی توابع

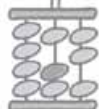
۸۱۲- دو تابع f و g بر روی اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. در کدام حالت دو تابع مساوی‌اند؟

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|} \text{ و } g(x) = 1 \quad (2)$$

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6} \text{ و } f(x) = \sqrt{x-2} \times \sqrt{x-3} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|} \text{ و } g(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2} \text{ و } g(x) = x \quad (3)$$



۸۱۳- در کدام گزینه، توابع f و g برابرند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x + 2} \\ g(x) = \frac{x - 1}{x + 2} \end{array} \right. \quad (۴) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{\sqrt{x - 2}}{\sqrt{x - 2}} \\ g(x) = \sqrt{\frac{x - 2}{x - 2}} \end{array} \right. \quad (۳) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{4 - x} \times \sqrt{2 + x} \\ g(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 8} \end{array} \right. \quad (۲) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1} \\ g(x) = \sqrt{2x - 2} + \sqrt{2x + 2} \end{array} \right. \quad (۱)$$

۸۱۴- اگر توابع $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$ و $g(x) = \frac{x^2 + cx + d}{x^2 + ax + b}$ با یکدیگر برابر باشند، $c + d$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۸۱۵- در کدام گزینه، توابع f و g برابرند؟

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{-x^2} \\ g(x) = x\sqrt{-x} \end{array} \right. \quad (۴) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{(x + 2)(x - 1)^2} \\ g(x) = |x - 1|\sqrt{x + 2} \end{array} \right. \quad (۳) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{(x - 1)(x + 2)^2} \\ g(x) = |x + 2|\sqrt{x - 1} \end{array} \right. \quad (۲) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \sqrt{(x - 1)(x + 2)^2} \\ g(x) = (x + 2)\sqrt{x - 1} \end{array} \right. \quad (۱)$$

۸۱۶- اگر توابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} & x \neq \pm 1 \\ \frac{ax + 2}{x + b} & x = \pm 1 \end{cases}$ و $g(x) = x + c$ با هم برابر باشند، $b + c$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۱/۵ (۳) ۲ (۴) ۲/۵

۸۱۷- تابع $f(x) = \sqrt{x} + [-x]$ با کدام تابع برابر است؟

$$g(x) = \frac{1}{[x] + [1 - x]} \quad (۱) \quad g(x) = \sqrt{-\cos^2 \pi x} \quad (۲) \quad g(x) = \sqrt{-\sin^2 \pi x} \quad (۳) \quad g(x) = \left[\frac{x^2}{x^2 + 1} \right] \quad (۴)$$

۸۱۸- توابع $f(x) = \frac{2x + 1}{|x + 1| - x}$ و $g(x) = ax + |x + a|$ مساوی اند. a کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۸۱۹- کدام یک از توابع زیر با تابع $y = \log \frac{x - 2}{x}$ برابر است؟

$$\log(x - 2) - \log x \quad (۱) \quad \log \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \quad (۲) \quad \frac{1}{2} \log \left(\frac{x - 2}{x} \right)^2 \quad (۳) \quad 2 \log \sqrt{\frac{x - 2}{x}} \quad (۴)$$

برد توابع

۸۲۰- برد تابع $y = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$ به صورت $\mathbb{R} - \{b\}$ است. مقدار b کدام است؟

(۱) ۱ (۲) -۴ (۳) ۵ (۴) ۹

۸۲۱- برد تابع $y = \frac{(x - 1)^2(x - 2)}{x^2 - 3x + 2}$ کدام است؟

(۱) $(0, +\infty)$ (۲) $[0, +\infty)$ (۳) $(0, +\infty) - \{1\}$ (۴) $[0, +\infty) - \{1\}$

(برگرفته از کتاب درسی)

۸۲۲- برد تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 1, x \neq 0 \\ \sqrt{x - 2} & x > 2 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{R} - [0, 1]$ (۲) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ (۳) $(0, +\infty)$ (۴) $\mathbb{R} - \{0\}$

۸۲۳- برد $y = x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ در کدام گزینه آمده است؟

(۱) $(1, +\infty)$ (۲) $[2, +\infty)$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $[3, +\infty)$

۸۲۴- برد تابع $f(x) = |x| + 2|x - 1|$ کدام است؟

(۱) $[2, +\infty)$ (۲) $[1, +\infty)$ (۳) $[0, +\infty)$ (۴) $[3, +\infty)$

۸۲۵- برد تابع $y = |x| - 2|x + 1|$ کدام است؟

(۱) $[-2, +\infty)$ (۲) $(-\infty, -2]$ (۳) $[1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, 1]$

۸۲۶- برد تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x < 2 \\ 4 - x & x \geq 2 \end{cases}$ کدام است؟

(۱) $(-\infty, 1]$ (۲) $(-\infty, 2]$ (۳) $\mathbb{R}$ (۴) $(-\infty, 4)$





$$۸۲۷- \text{برد تابع } f(x) = \begin{cases} x+2 & x \geq 3 \\ x^2 - 2x + 2 & 0 \leq x < 3 \\ |x| + 2 & x < 0 \end{cases} \text{ کدام است؟}$$

$$(۱) [1, +\infty) \quad (۲) [1, 5] \quad (۳) [2, +\infty) \quad (۴) \mathbb{R}$$

۸۲۸- تابع $f(x) = x^2 - 6x + 4$ با دامنه $\{1, 2, 8, n\}$ مفروض است. اگر مجموع اعضای برد تابع f برابر ۱۵ باشد، n کدام نمی تواند باشد؟

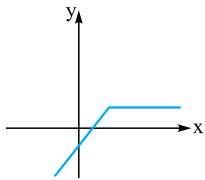
$$(۱) -2 \quad (۲) -3 \quad (۳) 4 \quad (۴) 5$$

۸۲۹- اگر برد تابع $y = x + a \frac{|x|}{x}$ برابر $\mathbb{R}$ باشد، حدود a کدام است؟

$$(۱) -1 < a < 1 \quad (۲) a < 0 \quad (۳) a > 0 \quad (۴) |a| > 1$$

۸۳۰- نمودار تابع $y = x + a|x + 2a|$ به صورت مقابل است. برد این تابع کدام است؟

$$(۱) [1, +\infty) \quad (۲) (-\infty, 2] \quad (۳) [2, +\infty) \quad (۴) (-\infty, 1]$$



۸۳۱- برد تابع $y = 2 - 3\sqrt{6x - x^2}$ بازه $[a, b]$ است. مقدار $b - a$ چه عددی است؟

$$(۱) 3 \quad (۲) 6 \quad (۳) 9 \quad (۴) 12$$

۸۳۲- دامنه و برد تابع غیر ثابت $y = a\sqrt{4x - x^2}$ برابر است، مقدار a کدام است؟

$$(۱) 1 \quad (۲) 2 \quad (۳) 4 \quad (۴) 8$$

۸۳۳- هرگاه $f(x) = (x - |x|)\sqrt{\frac{4-x}{x}}$ ، برد تابع f کدام است؟

$$(۱) \{0\} \quad (۲) [-2, 0] \quad (۳) [0, 2] \quad (۴) [-2, 2]$$

۸۳۴- برد تابع با ضابطه $f(x) = (x + |x|)\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ ، کدام است؟

$$(۱) (0, 1] \quad (۲) [0, 2] \quad (۳) [1, 2] \quad (۴) (1, 3)$$

۸۳۵- برد تابع $y = x - [x + \frac{1}{x}]$ کدام است؟

$$(۱) [\frac{1}{3}, 1) \quad (۲) [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \quad (۳) [-\frac{1}{3}, 1) \quad (۴) [\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

۸۳۶- اگر $f(x) = x - [x]$ ، آنگاه برد تابع $g(x) = f(2x - 3) - 2f(x)$ کدام است؟

$$(۱) [-1, 0] \quad (۲) [0, 1] \quad (۳) [-1, 0] \quad (۴) \{0, 1\}$$

۸۳۷- برد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|^2}$ ، کدام است؟

$$(۱) [-1, 1] \quad (۲) \{-1, 1\} \quad (۳) \{0\} \quad (۴) \{0, 1, -1\}$$

۸۳۸- تابع $f(x) = [a(x^2 - 3x)]$ با دامنه $[0, 3]$ مفروض است. اگر برد تابع f یک مجموعه تک‌عضوی باشد، مجموع اعداد صحیح قابل قبول برای

$9a$ کدام است؟

$$(۱) -6 \quad (۲) -9 \quad (۳) -10 \quad (۴) -12$$

۸۳۹- در تابع با ضابطه $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ مقدار $f(-\frac{1}{4}f(x))$ کدام است؟

$$(۱) -1 \quad (۲) 1 \quad (۳) \text{ صفر} \quad (۴) \text{ تعریف نشده}$$

۸۴۰- اگر $f(x) = \cos^2 x + \cos^2 2x$ ، آنگاه برد تابع $y = [f(x)]$ چند عضو دارد؟

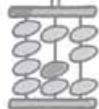
$$(۱) 1 \quad (۲) 2 \quad (۳) 3 \quad (۴) 4$$

۸۴۱- برد تابع $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ کدام است؟

$$(۱) [0, 1] \quad (۲) [\frac{1}{4}, 1] \quad (۳) [0, 2] \quad (۴) [\frac{1}{4}, 1]$$

۸۴۲- کدام گزینه عضوی از برد تابع $f(x) = x - 2\sqrt{x-2}$ است؟

$$(۱) \text{ صفر} \quad (۲) -1 \quad (۳) 2 \quad (۴) -2$$



انواع توابع

۸۴۳- هرگاه $f(x) = (2a-1)x^2 + (4a+b)x + a-b$ تابعی ثابت باشد. $f(4)$ چه عددی است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) ۶ (۴) ۱۰

۸۴۴- اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی باشد به طوری که $f(3) - 4g(2) = 5$ مقدار $f(3) + g^{-1}(2 + f(4))$ چه عددی است؟

- (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۱۱ (۴) ۱۵

۸۴۵- اگر تابع $f = \{(1, a-2), (a+1, b), (4, c-1), (c, c)\}$ همانی باشد، کدام تابع زیر ثابت است؟

- (۱) $y = ax - x$ (۲) $y = bx + 3x$ (۳) $y = cx - 5x$ (۴) $y = ax + bx$

۸۴۶- اگر f یک تابع خطی و تابعی $y = \frac{f(x)}{2-3x}$ برابر تابع ثابت $g(x) = 2$ ، $x \neq \frac{2}{3}$ باشد، آن گاه $f(2)$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۸ (۳) -۲ (۴) -۶

۸۴۷- به فرض آن که $f(x) = \frac{a-2x}{5x+3}$ تابعی ثابت باشد. $a + f(2)$ چه عددی است؟

- (۱) $-\frac{8}{5}$ (۲) $-\frac{6}{5}$ (۳) -۲ (۴) -۳

۸۴۸- اگر f تابع ثابت و g تابع همانی و دامنه هر دو $\mathbb{R}$ باشد به طوری که $f(3) = 2g(1)$ آن گاه ریشه های معادله $x^2 - 3f(x) + g(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) ۲ و -۳ (۲) ۳ و -۲ (۳) -۲ و -۳ (۴) ۲ و ۳

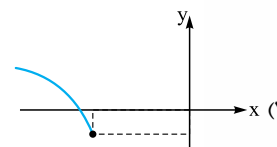
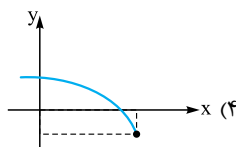
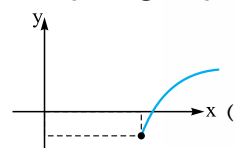
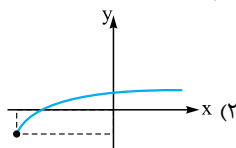
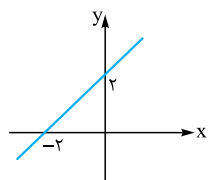
۸۴۹- تابع $f(x) = x^2 + 2x - 5$ مفروض است. اگر تابع $y = \frac{a+f(x+b)}{x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ همانی باشد، مقدار $f(a+b)$ کدام است؟

- (۱) ۴۶ (۲) ۵۸ (۳) ۳۰ (۴) ۲۸

۸۵۰- فرض کنید $f(x) = \frac{|x|}{1+|x|}$ در کدام بازه تابع $y = f(\frac{1}{x}) + \frac{1}{x}f(x)$ یک تابع ثابت است؟

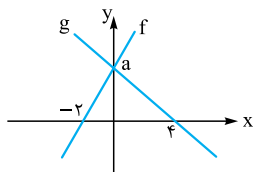
- (۱) $0 < x \leq 1$ (۲) $-1 \leq x \leq 1$ (۳) $x > 0$ (۴) $x < 0$

۸۵۱- نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = \sqrt{2+f(x)} - 1$ کدام است؟



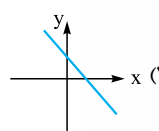
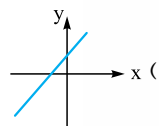
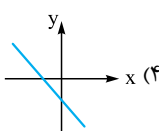
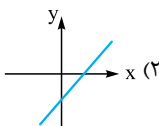
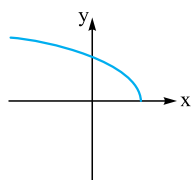
۸۵۲- نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. اگر تابع $h(x) = 2x^2 + (fg)(x)$ خطی باشد، مقدار $h(a)$ کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۲۸ (۳) ۳۲ (۴) ۳۶



۸۵۳- تابع خطی f با دامنه $[2, 4]$ و شیب منفی مفروض است. اگر برد تابع $g(x) = 3x + f(x)$ بازه $[3, 8]$ باشد، برد تابع $h(x) = x - f(2x)$ کدام است؟

- (۱) $[6, 10]$ (۲) $[11, 35]$ (۳) $[-1, 11]$ (۴) $[-4, 6]$



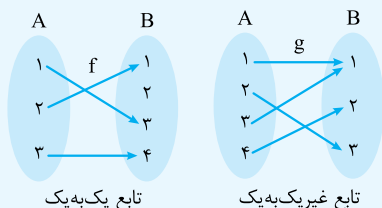
۸۵۴- نمودار تابع $y = \sqrt{ax+b}$ به صورت مقابل است. نمودار خط $y = bx - a$ کدام است؟



تابع یک به یک و معکوس

تابع یک به یک $f: A \rightarrow B$ را تابعی یک به یک گوئیم هرگاه برای $x_1, x_2 \in A$ شرط زیر برقرار باشد.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$



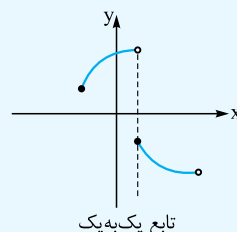
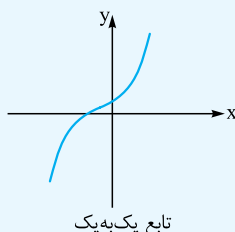
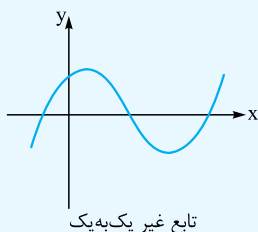
تست هرگاه $f = \{(2, 3), (b, 6), (2, a), (a+1, 2a)\}$ تابعی یک به یک باشد، مقدار $b - a$ چه عددی است؟

۱ (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) -۲ (۴)

پاسخ گزینه «۱» اولاً f باید تابع باشد، پس:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} (2, 3) \in f \\ (2, a) \in f \end{aligned} \right\} &\Rightarrow a = 3 \\ \left. \begin{aligned} (b, 6) \in f \\ (a+1, 2a) = (4, 6) \in f \end{aligned} \right\} &\Rightarrow b = 4 \\ &\Rightarrow b - a = 1 \end{aligned}$$

با توجه به تعریف، اگر f تابعی یک به یک باشد هر خط افقی، نمودار f را در بیش از یک نقطه نباید قطع کند.



تست اگر $f(x) = ax + |x - 3|$ تابعی یک به یک باشد، حدود a کدام است؟

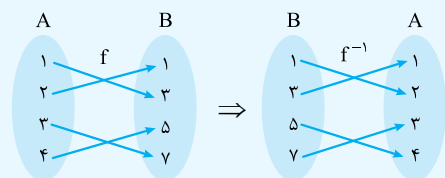
$|a| \leq 1$ (۱) $a > 0$ (۲) $|a| \geq 2$ (۳) $|a| > 1$ (۴)

پاسخ گزینه «۴» اگر بپذیریم f یک تابع با ۲ ضابطه است، برای $x \leq 3$ یک تابع خطی و برای $x > 3$ تابع خطی دیگری خواهد بود. پس باید هر دو یک به یک باشند و به لحاظ یکنوایی مثل هم باشند؛ یعنی یا هر دو ضابطه خطی صعودی اکید و یا هر ۲ ضابطه خطی نزولی اکید باشند. پس باید ۲ شیب تابع خطی هم علامت باشند.

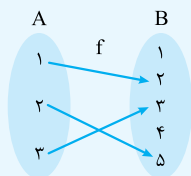
$$\begin{aligned} x > 3: f(x) &= (a+1)x - 3 \\ x \leq 3: f(x) &= (a-1)x + 3 \end{aligned} \Rightarrow (a+1)(a-1) > 0 \Rightarrow a > 1 \text{ یا } a < -1$$

معکوس (وارون) تابع اگر $f: A \rightarrow B$ تابعی یک به یک باشد می گوئیم f تابعی وارون پذیر است و تعریف می کنیم $f^{-1}: B \rightarrow A$ به طوری که:

$$f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow f^{-1}(\beta) = \alpha$$

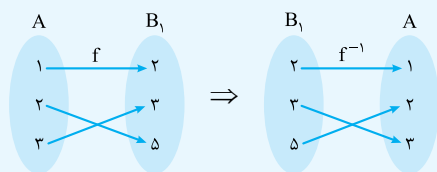


f یک به یک و وارون پذیر



به عنوان مثال $f(1) = 3$ پس $f^{-1}(3) = 1$.

در این مثال ابتدا ۱ و ۴ را از B حذف می کنیم.



تابع به دست آمده با f برابر خواهد بود.

دقت کنید حذف اعضای اضافی در B در تعریف تابع هیچ اشکالی ندارد.

تست - به فرض آن که $f(x) = \frac{4x-1}{x+3}$ ، مقدار $f^{-1}(2+f(10))$ چه عددی است؟

- (۱) -۱۶ (۲) ۵ (۳) $\frac{16}{9}$ (۴) ۱۶

پاسخ - گزینه «۱» را به دست آوریم:

راه اول: ابتدا ضابطه f^{-1} را به دست می آوریم، پس کافی است x را بر حسب y به دست آوریم.

$$y = \frac{4x-1}{x+3} \Rightarrow xy + 3y = 4x - 1 \Rightarrow xy - 4x = -1 - 3y \Rightarrow x(y-4) = -1-3y \Rightarrow x = \frac{3y+1}{4-y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{4-x}$$

حالا عبارت خواسته شده را می یابیم:

$$f(10) = \frac{39}{13} = 3 \Rightarrow f^{-1}(2+f(10)) = f^{-1}(5) = \frac{15+1}{-1} = -16$$

راه دوم: ابتدا $f(10)$ را به دست می آوریم و داریم:

$$f(10) = 3 \Rightarrow f^{-1}(2+3) = f^{-1}(5)$$

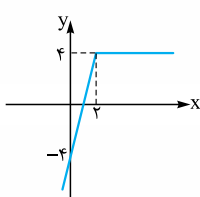
فرض کنیم $f^{-1}(5) = \alpha$ آن گاه $f(\alpha) = 5$ پس:

$$\frac{4\alpha-1}{\alpha+3} = 5 \Rightarrow 4\alpha-1 = 5\alpha+15 \Rightarrow \alpha = -16 \Rightarrow f^{-1}(2+f(10)) = -16$$

نکته اگر تابعی یکبه یک نباشد آن گاه وارون پذیر نیست لذا گاهی اوقات می توانیم با محدود کردن دامنه تعریف تابع، از آن یک تابع جدید و یکبه یک بسازیم و سپس معکوس آن را به دست آوریم.

تست - تابع $f(x) = 2x - |4-2x|$ در بازه های وارون پذیر است. ضابطه $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}x+1, x \geq 4$ (۲) $\frac{1}{4}x-1, x \leq 4$ (۳) $\frac{1}{4}x-1, x \geq 4$ (۴) $\frac{1}{4}x+1, x \leq 4$



پاسخ - گزینه «۴» اگر نمودار f را رسم کنیم مشخص می شود که f یکبه یک و در نتیجه وارون پذیر نمی باشد.

$$f(x) = 2x - |4-2x|$$

$$f(x) = \begin{cases} 4 & x > 2 \\ 4x-4 & x \leq 2 \end{cases}$$

دقت کنید تابع ثابت، تابعی وارون پذیر نیست. پس با فرض $x \leq 2$ تابع وارون پذیر خواهد بود بدین ترتیب:

$$f(x) = 4x-4, x \leq 2, R_f = (-\infty, 4]$$

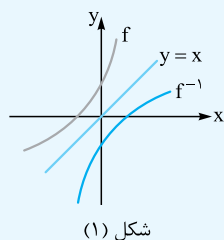
$$y = 4x-4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x+1$$

$$D_f = (-\infty, 2] \Rightarrow R_f = (-\infty, 4]$$

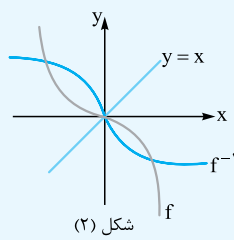
تابع یکبه یک و وارون پذیر است:

اما f تابع خطی صعودی اکید است، پس:

از آن جایی که $D_{f^{-1}} = R_f$ ، پس ضابطه معکوس f به صورت $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x+1, x \leq 4$ است.



شکل (۱)

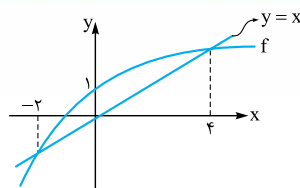


شکل (۲)

نکته نمودار دگارتی دو تابع وارون پذیر $y=f(x)$ و $y=f^{-1}(x)$ نسبت به خط $y=x$ قرینه هم می باشند.

اگر تابع وارون پذیر f نیمساز ناحیه های اول و سوم را در نقطه $A(\alpha, \alpha)$ قطع کند آن گاه f^{-1} هم از این نقطه عبور می کند پس نقاط تلاقی f با نیمساز ناحیه های اول و سوم برخی از نقاط تلاقی f با f^{-1} را نشان می دهد. ولی لزوماً همه نقاط تلاقی f با f^{-1} روی نیمساز ناحیه اول و سوم نیست. (مانند شکل (۲))

تست - شکل روبه رو نمودار $y=f(x)$ است. دامنه تعریف $y=\sqrt{x-f^{-1}(x)}$ کدام است؟



(۱) $[1, 4]$

(۲) $[-2, 4]$

(۳) $[-2, 1]$

(۴) $\mathbb{R} - (-2, 4)$

پاسخ - گزینه «۲» برای یافتن دامنه تعریف کافی است نامعادله $x-f^{-1}(x) \geq 0$ را حل کنیم. اگر دقت کنیم نمودار f^{-1} قابل رسم است و در بازه $[-2, 4]$ در شرط $f^{-1}(x) \leq x$ صدق می کند. پس همین بازه $[-2, 4]$ دامنه تعریف است.

تست - اگر $f(x) = \frac{2x+5}{x-2}$ باشد، نقاط تلاقی f با f^{-1} در کدام گزینه آمده است؟

(۴) $\mathbb{R}$

(۳) $\mathbb{R} - \{2\}$

(۲) $x = -5$ و $x = 1$

(۱) $x = 5$ و $x = -1$



پاسخ - گزینه «۳» در این جا رسم نمودار قدری مشکل است پس بهتر است ضابطه f^{-1} را به دست آوریم.

$$y = \frac{2x+5}{x-2} \Rightarrow xy - 2y = 2x + 5 \Rightarrow xy - 2x = 2y + 5 \Rightarrow x = \frac{2y+5}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{x-2}$$

دقت کنید f^{-1} بر f منطبق است. پس نقاط تلاقی یا نقاط مشترک آن‌ها $\mathbb{R} - \{2\}$ است. دقت کنید که اگر f را با نیمساز ناحیه‌های اول و سوم تلاقی می‌دادیم فقط به دو نقطه $x = -1$ و $x = 5$ می‌رسیدیم. پس یافتن ضابطه مناسب‌تر است. با توجه به مقدمات گفته‌شده و تست حل‌شده، بهتر است در این گونه سوالات ضابطه f^{-1} را به دست آوریم و با f تلاقی دهیم و یا این که از نمودار f یا f^{-1} کمک بگیریم.

نکته در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که آن را هموگرافیک می‌نامیم $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ ضابطه معکوس آن است. به همین جهت وقتی $a+d=0$ باشد آن‌گاه f و f^{-1} بر هم منطبق می‌شوند.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

◀ تابع یک به یک

۸۵۵- اگر رابطه $f = \{(3,2), (a,5), (3, a^2 - a), (b,2), (-1,4)\}$ تابع یک‌به‌یک باشد، دو تایی (a,b) کدام است؟
 (۱) $(-1,1)$ (۲) $(-1,3)$ (۳) $(2,1)$ (۴) $(2,3)$

۸۵۶- تابع $f = \{(2, a^2 - 1), (1,3), (b,0), (2, a^2 + 1)\}$ یک‌به‌یک است. مقدار $a+b$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۵۷- اگر $f = \{(1,m), (1, m^2 - 3m), (m,4), (0,3)\}$ تابعی یک‌به‌یک باشد، m کدام است؟
 (۱) $m=0$ (۲) فقط $m=0$ (۳) فقط $m=4$ (۴) m یافت نمی‌شود.

۸۵۸- تابع $f(x) = ax^2 + 3x - 1 + a$ با دامنه $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است. مقدار $f(1)$ کدام است؟
 (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۵۹- تابع $y = x^2 + ax + 1$ در بازه $(-\infty, 2]$ یک‌به‌یک است. حداکثر مقدار a کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) -۴

۸۶۰- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

(۱) $y = x - 2\frac{|x|}{x}$ (۲) $y = x - |x - 3|$ (۳) $y = 2x + |x|$ (۴) $y = x + 2|x - 1|$

۸۶۱- کدام تابع یک‌به‌یک است؟

(۱) $y = |x + 2| + 4x$ (۲) $y = |x + 2| + |4x|$ (۳) $y = |x + 2| + x$ (۴) $y = |x + 2| + |x|$

۸۶۲- تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ x + a & x < 2 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک است. حدود a کدام است؟

(۱) $a \geq -2$ (۲) $a \leq -2$ (۳) $a \geq 2$ (۴) $a \leq 2$

۸۶۳- حدود a برای آن که تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ 2ax + 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 1 & x > 1 \end{cases}$ یک‌به‌یک باشد، کدام است؟

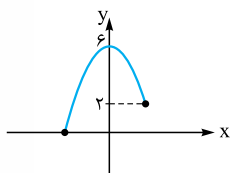
(۱) $0 < a \leq \frac{3}{4}$ (۲) $0 < a \leq \frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{4}, a \neq 0$ (۴) $-\frac{1}{4} \leq a < 0$

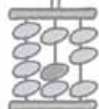
۸۶۴- نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر تابع $y = \frac{a^2 x}{|x|} + f(x)$ یک‌به‌یک باشد، حدود $|a|$ کدام است؟

(۱) $|a| \geq \sqrt{3}$ (۲) $|a| \geq \sqrt{2}$ (۳) $0 < |a| \leq \sqrt{2}$ (۴) $0 < |a| \leq \sqrt{3}$

۸۶۵- تابع $y = \frac{mx - m + 1}{x + 2}$ یک‌به‌یک است. مقدار m کدام نمی‌تواند باشد؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) -۱ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) ۳





تابع معکوس (وارون)

۸۶۶- به فرض آن که $f = \{(1, 2), (a+1, 2a), (b, 4), (1, a)\}$ تابعی معکوس پذیر باشد، $f^{-1}(4)$ چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۶۷- اگر تابع $y = x^3 + ax^2 + a - 3$ معکوس پذیر باشد، منحنی معکوس آن از کدام نقطه می گذرد؟

- (۱) $(2, 5)$ (۲) $(1, 0)$ (۳) $(0, 1)$ (۴) $(5, 2)$

۸۶۸- تابع f با دامنه $\mathbb{R}$ معکوس پذیر است. کدام تابع زیر حتماً معکوس ناپذیر است؟

- (۱) $y = f(2x-1)$ (۲) $y = f(x) + f(-x)$ (۳) $y = |f(x)|$ (۴) $y = f(x) - f(-x)$

۸۶۹- در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ ، مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

- (۱) تعریف نشده (۲) -۵ (۳) -۲ (۴) -۸

۸۷۰- اگر $g(x) = f(3x-4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ ، حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۸

۸۷۱- به فرض آن که $f^{-1}(3) = 4$ و $1 + f(1-3x) = g(2x+3)$ ، مقدار $g^{-1}(4)$ چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۵

۸۷۲- اگر $f(2x) = 1 - 3g(\frac{3}{x})$ و $g^{-1}(2) = 2$ ، آن گاه $f^{-1}(-5)$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) ۵ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۷۳- با فرض $f(x) = g(1 - \frac{3}{x})$ و $g^{-1}(x) = 2 + \frac{3}{x}$ ، مقدار $f^{-1}(3)$ چه عددی است؟

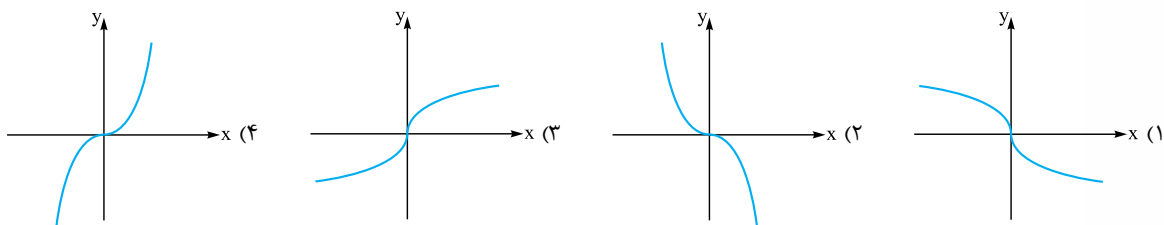
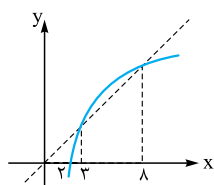
- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۳) -۱ (۴) ۳

۸۷۴- اگر $f(x) = g^3(x) + g(x)$ و $g^{-1}(x) = \sqrt{x+7}$ ، حاصل $f^{-1}(10)$ کدام است؟

- (۱) ۹ (۲) -۶ (۳) ۳ (۴) -۳

۸۷۵- اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ ، حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۸۷۶- اگر $f(x) = x|x|$ باشد، نمودار تابع $y = f^{-1}(x)$ کدام است؟۸۷۷- شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ناحیه اول و سوم است. دامنه تابع با ضابطه $y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟

- (۱) $(0, 2]$

- (۲) $[2, 3]$

- (۳) $[2, 8]$

- (۴) $[3, 8]$

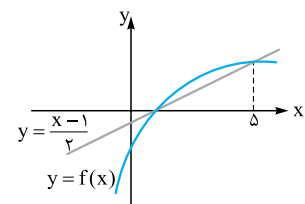
۸۷۸- اگر نمودار f مطابق شکل زیر باشد، دامنه تعریف تابع $g(x) = \sqrt{2x+1 - f^{-1}(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[1, 5]$

- (۲) $[0, 2]$

- (۳) $[-\frac{1}{2}, 5]$

- (۴) $[0, 5]$

۸۷۹- اگر $f(x) = 4 - 2^x$ باشد، دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf^{-1}(x)}$ کدام است؟

- (۱) $[2, 3]$ (۲) $[3, 4]$ (۳) $[0, 3]$ (۴) $[0, 4]$

۸۸۰- ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟

- (۱) $y = x^2 - 4x + 5, x \leq 2$ (۲) $y = -x^2 + 4x - 5, x \leq 2$ (۳) $y = x^2 - 4x + 5, x \geq 1$ (۴) $y = -x^2 + 4x - 5, x \geq 1$



۸۸۱- ضابطه معکوس تابع $f(x) = 3 - \sqrt{2-x}$ در کدام گزینه آمده است؟

$f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 7, x \geq 3$ (۲)

$f^{-1}(x) = x^2 - 6x + 7, x \leq 3$ (۱)

$f^{-1}(x) = -x^2 + 6x - 7, x \geq 3$ (۴)

$f^{-1}(x) = -x^2 + 6x - 7, x \leq 3$ (۳)

۸۸۲- در بازه‌ای که تابع $f(x) = x - |3-x|$ معکوس پذیر است، ضابطه معکوس آن کدام است؟

$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}, x \leq 3$ (۴) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}, x \leq 3$ (۳) $f^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}, x \in \mathbb{R}$ (۲) $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}, x \in \mathbb{R}$ (۱)

۸۸۳- تابع با ضابطه $f(x) = 2x - |4-2x|$ در بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه $f^{-1}(x)$ در آن بازه کدام است؟

$\frac{1}{4}x + 1, x \leq 4$ (۴) $\frac{1}{4}x - 1, x \geq 4$ (۳) $\frac{1}{4}x - 1, x \leq 4$ (۲) $\frac{1}{4}x + 1, x \geq 4$ (۱)

۸۸۴- اگر $f(x) = x^2 - 2x - 3; x \geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{4}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

۲۱ (۴) ۱۸ (۳) ۱۵ (۲) ۱۲ (۱)

۸۸۵- با فرض $f(x) = 3x + 1$ ، دامنه تابع $y = \sqrt{f^{-1}(3x-1)} - 2x$ کدام است؟

$[\frac{2}{3}, +\infty)$ (۴) $[-\frac{2}{3}, +\infty)$ (۳) $(-\infty, -\frac{2}{3})$ (۲) $(-\infty, \frac{2}{3}]$ (۱)

۸۸۶- تابع $f(x) = \frac{x-2}{ax^2+bx+8}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ مفروض است. دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f^{-1}(2x)} - 6$ به صورت $(m, n]$ است. $m+n$ کدام است؟

$\frac{1}{16}$ (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) ۱ (۳) صفر (۴)

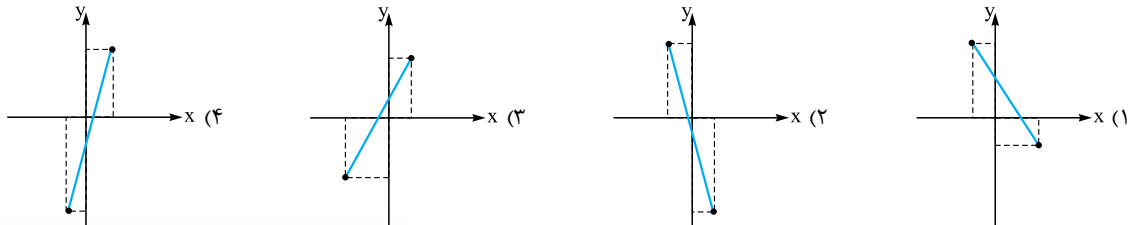
۸۸۷- اگر f یک تابع خطی با شیب مثبت و $f^{-1}(f^{-1}(x)) = 4x + 3$ باشد، ضابطه $f(x)$ کدام است؟

$\frac{x-1}{2}$ (۱) $2x+1$ (۲) $2x-1$ (۳) $\frac{x+1}{2}$ (۴)

۸۸۸- قرینه خط به معادله $3y - 2x = 4$ را نسبت به خط $y = x$ ، d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟

-۲ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴)

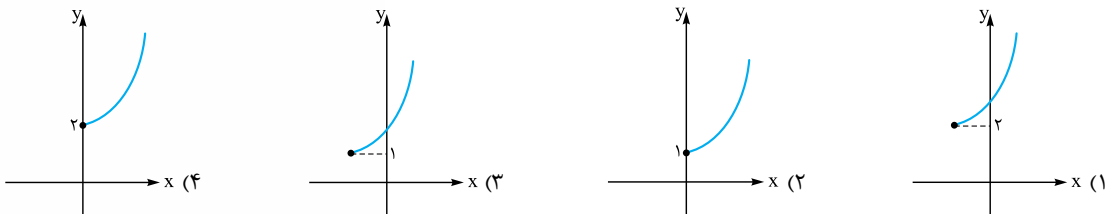
۸۸۹- تابع خطی f با دامنه $[-3, 3]$ مفروض است هرگاه $f(1) = 5$ و $f^{-1}(1) = 0$ ، نمودار $y = f^{-1}(x) - f(x)$ در کدام گزینه آمده است؟



۸۹۰- اگر $f(x) = x + 4\sqrt{x}$ و $f^{-1}(x) = \lambda + x + a\sqrt{x+b}$ ، آن‌گاه $a+b$ چه قدر است؟

-۴ (۱) -۱ (۲) ۳ (۳) صفر (۴)

۸۹۱- فرض کنید $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x-1}, x \geq 2$ ، نمودار تابع f^{-1} کدام است؟



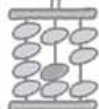
۸۹۲- ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

$-x^2$ (۱) x^2 (۲) $x|x|$ (۳) $-x|x|$ (۴)

۸۹۳- ضابطه معکوس $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است؟

$f^{-1}(x) = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (۲) $f^{-1}(x) = x\sqrt{|x|}, x \in \mathbb{R}$ (۱)

$f^{-1}(x) = x|x|, x \in \mathbb{R} - \{0\}$ (۳) $f^{-1}(x) = x|x|, x \in \mathbb{R}$ (۴)



۸۹۴- در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{1-x^2}$, $f(0) = 0$, ضابطه وارون آن برابر کدام است؟

- (۱) $f(x)$ (۲) $-f(x)$ (۳) $xf(x)$ (۴) $-xf(x)$

۸۹۵- اگر $f(x) = \frac{1}{x} (x + \sqrt{x^2 + 4})$, حاصل $f^{-1}(x) + f^{-1}(\frac{1}{x})$ کدام است؟

- (۱) $2x$ (۲) $\frac{2}{x}$ (۳) $x^2 - 1$ (۴) صفر

۸۹۶- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطه تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟

- (۱) $\tan x$ (۲) $\cot x$ (۳) $\frac{|\cos x|}{\sin x}$ (۴) $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

۸۹۷- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ باشد، حاصل $f^{-1}(\tan x)$ کدام است؟

- (۱) $\sin x$ (۲) $\cos x$ (۳) $\frac{\cos x}{|\cos x|} \cdot \sin x$ (۴) $\frac{|\sin x|}{\sin x} \cdot \cos x$

۸۹۸- ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ کدام است؟

- (۱) $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$, $|x| < 1$ (۲) $f^{-1}(x) = \frac{1-|x|}{x}$, $|x| > 1$ (۳) $f^{-1}(x) = \frac{x}{|x|-1}$, $|x| > 1$ (۴) $f^{-1}(x) = \frac{|x|-1}{x}$, $|x| < 1$

۸۹۹- اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, ضابطه $f^{-1}(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2} (x - \frac{1}{x})$, $x \in \mathbb{R}$ (۲) $\frac{1}{2} (\frac{1}{x} - x)$, $x \in \mathbb{R}$ (۳) $\frac{1}{2} (x - \frac{1}{x})$, $x > 0$ (۴) $\frac{1}{2} (\frac{1}{x} - x)$, $x > 0$

۹۰۰- اگر f تابعی وارون پذیر و $f(x) = 3 - 2g(\frac{x-3}{2})$ و $f^{-1}(x) + kg^{-1}(\frac{x-3}{2}) = 2$ باشد، مقدار k کدام است؟

- (۱) -2 (۲) 2 (۳) 3 (۴) -3

۹۰۱- فرض کنید f وارون پذیر و $f(2x+1) + g(x+2) = 1$ باشد. به ازای کدام مقدار k رابطه $f^{-1}(x) - f^{-1}(1-x) = 2g^{-1}(k)$ همواره برقرار است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۹۰۲- نمودار معکوس تابع $f(x) = \frac{mx+3}{x+m-2}$ بر نمودار خود تابع منطبق است. مقدار m کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) -1 (۴) -2

۹۰۳- تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f و f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) غیر متقاطع

۹۰۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{x+4}{x-2}$ ، با دامنه $\mathbb{R} - \{2\}$ ، نمودار وارون خود را با کدام طول ها قطع می کند؟

- (۱) -4 و -1 (۲) 4 و -1 (۳) -4 و 1 (۴) 4 و 1

اعمال اصلی و ترکیب توابع

۹ اعمال بر روی تابع بعد از آن که با مفهوم تابع و انواع آن آشنا شدیم می خواهیم جمع، ضرب، تفریق و تقسیم دو تابع را تعریف کنیم.

اگر f و g دو تابع باشند به طوری که اشتراک دامنه تعریف آن ها غیر تهی باشد، آن گاه: $D_{f+g} = D_f \cap D_g$ و $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ در واقع برای x مشترک از دامنه تعریف آن ها، مقادیر دو تابع را با هم جمع می کنیم. به همین ترتیب سایر توابع را تعریف می کنیم.

$D_{f-g} = D_f \cap D_g$ و $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ و $D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$ و $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x : g(x) = 0\}$ و $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

تست- اگر $f = \{(1,2), (2,4), (3,1), (0,3)\}$ و $g = \{(0,2), (1,3), (3,1)\}$ ، برد تابع $(f-g) \times g^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\{2, 0\}$ (۲) $\{-3, 0, 3\}$ (۳) $\{1, 3\}$ (۴) $\{0, -3\}$

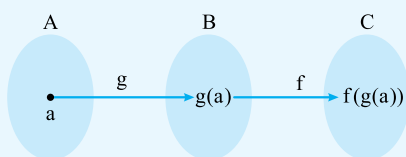
پاسخ- گزینه «۴»

$$\begin{cases} D_f = \{1, 2, 3, 0\} \\ D_g = \{0, 1, 3\} \end{cases} \Rightarrow D_{f-g} = \{0, 1, 3\} \Rightarrow f-g = \{(0, 3-2), (1, 2-3), (3, 1-1)\}$$

$$\left. \begin{aligned} f-g &= \{(0, 1), (1, -1), (3, 0)\} \\ g^{-1} &= \{(2, 0), (3, 1), (1, 3)\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (f-g) \times g^{-1} = \{(3, 0), (1, -3)\}$$

پس برد آن $\{0, -3\}$ است.





◀ **ترکیب توابع** اگر $g: A \rightarrow B$ و $f: B \rightarrow C$ دو تابع باشند، آن گاه می توانیم به کمک آن ها تابع جدیدی را که آن را تابع مرکب می نامیم، به صورت مقابل تعریف کنیم. تابع $f \circ g: A \rightarrow C$ با تعریف $f \circ g(a) = f(g(a))$ را تابع مرکب می نامیم و داریم:

$$D_{f \circ g} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

به مثال زیر دقت کنید.

مثال

$$g = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\} \text{ و } f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$$

$$g(1) = 3, f(3) = 3 \Rightarrow f \circ g(1) = f(g(1)) = f(3) = 3 \Rightarrow (1, 3) \in f \circ g$$

$$g(2) = 1, f(1) = 2 \Rightarrow f \circ g(2) = f(g(2)) = f(1) = 2 \Rightarrow (2, 2) \in f \circ g$$

$$g(3) = 2, f(2) = 1 \Rightarrow f \circ g(3) = f(g(3)) = f(2) = 1 \Rightarrow (3, 1) \in f \circ g$$

$$\Rightarrow f \circ g = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$g \circ f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$

به همین ترتیب اگر بررسی کنیم آن گاه به دست می آید که:

تست هرگاه $g = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4)\}$ و $f = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5), (3, 4)\}$ کدام است؟

$$\{(4, 4), (1, 1), (3, 4)\} \quad (2)$$

$$\{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\} \quad (1)$$

$$\{(3, 3), (5, 5), (4, 3)\} \quad (4)$$

$$\{(1, 1), (2, 2), (4, 4)\} \quad (3)$$

پاسخ گزینه «۱» ابتدا f^{-1} و g^{-1} را تک تک به دست می آوریم، سپس آن ها را با هم ترکیب می کنیم.

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (5, 4), (4, 3)\}$$

$$g^{-1} = \{(1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1} = \{(2, 2), (3, 3), (5, 5)\}$$

دقت کنید جابه جایی در ترکیب توابع برقرار نیست؛ یعنی باید به همان ترتیب عمل کنیم، پس:

اگر ضابطه دو تابع f و g داده شده باشد می توانیم ترکیب آن ها را به دست آوریم. مثلاً اگر $f(x) = \frac{2}{x} - 2$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$ آن گاه:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{2}{\frac{x}{x+1}} - 2 = \frac{2(x+1)}{x} - 2 = \frac{2x+2}{x} - 2 = 2 + \frac{2}{x} - 2 = \frac{2}{x}$$

تست اگر $f(x) = 3 - |3 - x|$ ، ضابطه $f \circ f(x)$ کدام است؟

$$f(x) - 6 \quad (4)$$

$$6 - f(x) \quad (3)$$

$$-f(x) \quad (2)$$

$$f(x) \quad (1)$$

$$f(x) \leq 3$$

پاسخ گزینه «۱» ابتدا ضابطه f را به صورت $f(x) = 3 - |x - 3|$ می نویسیم و توجه می کنیم که:

$$f \circ f(x) = f(f(x)) = 3 - |f(x) - 3| = 3 - (3 - f(x)) = f(x)$$

نکته با داشتن f و g می توانیم $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آوریم. اما گاهی با داشتن $f \circ g$ و g می توانیم f را بیابیم و یا آن که با داشتن $f \circ g$ و f می توانیم g را بیابیم.

تست هرگاه $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ ، ضابطه $g \circ f(x)$ کدام است؟

$$2x^2 - 2x - 3 \quad (4)$$

$$2x^2 - 2x + 10 \quad (3)$$

$$2x^2 - 4x + 7 \quad (2)$$

$$2x^2 - 4x - 3 \quad (1)$$

پاسخ گزینه «۲» ابتدا با داشتن g و $f \circ g$ ، ضابطه f را می یابیم.

$$f \circ g(x) = 4(x^2 - 4x + 5) \Rightarrow f(2x - 3) = 4(x^2 - 4x + 5)$$

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2} \Rightarrow f(t) = 4\left(\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{t+3}{2}\right) + 5\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 8t - 24 + 20 \Rightarrow f(t) = t^2 - 2t + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

حالا با داشتن ضابطه های f و g ضابطه $g \circ f$ را به دست می آوریم. $g \circ f(x) = 2f(x) - 3 = 2x^2 - 4x + 10 - 3 = 2x^2 - 4x + 7$

نکته برای یافتن دامنه $f \circ g$ هم می توانیم $f \circ g$ را تشکیل دهیم سپس دامنه آن را به دست آوریم (به شرط آن که دامنه را قبل از ساده کردن ضابطه آن به دست آوریم) و هم می توانیم از تعریف دامنه تابع مرکب استفاده کنیم.

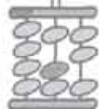
تست اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \log(x^2 + 15x)$ ، دامنه $f \circ g$ شامل چند عدد صحیح است؟

$$6 \quad (4)$$

$$10 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$



$$D_{fog} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

پاسخ- گزینه «۳» با توجه به تعریف داریم:

$$x^2 + 15x > 0 \Rightarrow x > 0 \text{ یا } x < -15$$

$$g(x) \in D_f \Rightarrow g(x) \leq 2 \Rightarrow \log(x^2 + 15x) \leq 2 \Rightarrow x^2 + 15x \leq 100 \Rightarrow x^2 + 15x - 100 \leq 0$$

$$(x+20)(x-5) \leq 0 \Rightarrow -20 \leq x \leq 5 \Rightarrow D_{fog} = [-20, -15) \cup (0, 5]$$

تعداد اعداد صحیح در دامنه تعریف آن، ۱۰ عدد صحیح است.

تست- اگر f تابعی معکوس پذیر باشد و تعریف کنیم $g\left(\frac{3}{x}\right) = 1 - 3f\left(\frac{3}{x}\right)$ به طوری که $f^{-1}(2) = -3$ ، مقدار $g^{-1}(-5)$ چه عددی است؟

$$5 \quad (4)$$

$$-2 \quad (3)$$

$$2 \quad (2)$$

$$-5 \quad (1)$$

$$f^{-1}(2) = -3 \Rightarrow f(-3) = 2$$

پاسخ- گزینه «۳» با توجه به مفاهیم تابع معکوس و تابع مرکب داریم:

$$g(-2) = 1 - 3f(-3) \Rightarrow g(-2) = 1 - 3(2) = -5 \Rightarrow g^{-1}(-5) = -2$$

با فرض $x = -1$ داریم:

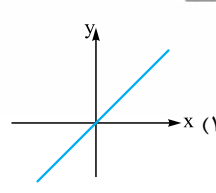
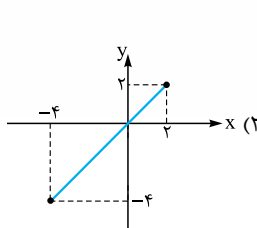
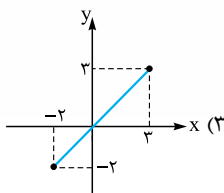
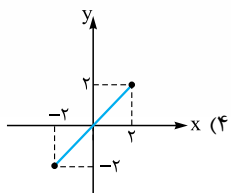
نکته- اگر f و g دو تابع وارون پذیر باشند، آن گاه داریم:

$$1 \quad (fog)^{-1}(a) = (g^{-1} \circ f^{-1})(a) = g^{-1}(f^{-1}(a))$$

$$2 \quad f \circ f^{-1}(a) = a \quad a \in R_f$$

$$3 \quad f^{-1} \circ f(a) = a \quad a \in D_f$$

تست- اگر تابع f تابعی یک به یک باشد به طوری که $D_f = [-2, 3]$ و $R_f = [-4, 2]$ ، نمودار $y = f \circ f^{-1}$ در کدام گزینه آمده است؟



پاسخ- گزینه «۲» می دانیم اگر f تابعی معکوس پذیر باشد، آن گاه ترکیب هر تابع معکوس پذیر با معکوس همان تابع، تابعی همانی است. همان طور که در نکته فوق اشاره شد: $f \circ f^{-1}(x) = x$ و $x \in R_f$. پس جواب تست تابع همانی است به طوری که در بازه $[-4, 2]$ همانی باشد.

پرسش های چهارگزینه ای

چهار عمل اصلی روی توابع

۹۰۵- اگر $f = \{(1, 2), (2, 0), (3, 2), (4, 1)\}$ و $g = \{(3, 1), (2, 1), (4, 2)\}$ ، تابع $\frac{g}{f} + g$ کدام است؟

$$\{(3, \frac{3}{4}), (4, 4)\} \quad (4)$$

$$\{(3, 1), (2, 1), (4, 4)\} \quad (3)$$

$$\{(3, 1), (4, 4)\} \quad (2)$$

$$\{(3, \frac{3}{4}), (2, 1), (4, 4)\} \quad (1)$$

۹۰۶- اگر $f(x) = \sqrt{4-x}$ و $g(x) = \sqrt{x}-1$ ، دامنه تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

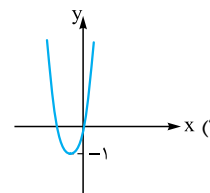
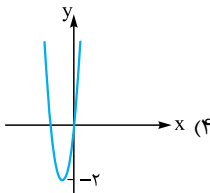
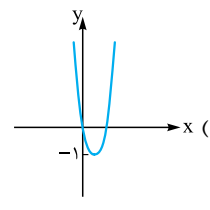
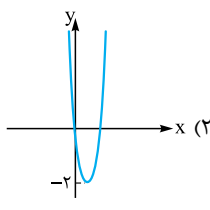
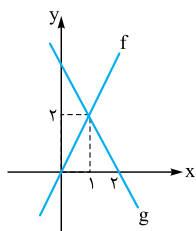
$$(1, 4] \quad (4)$$

$$[0, 4] \quad (3)$$

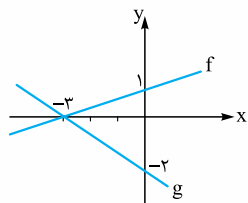
$$[0, 4] - \{1\} \quad (2)$$

$$[0, 4] \quad (1)$$

۹۰۷- نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. نمودار تابع $f \cdot (f - g)$ کدام است؟



۹۰۸- نمودار توابع خطی f و g به صورت مقابل است. به ازای کدام مقدار a ، $x=2$ ریشه معادله $(f-g)(x)=ax$ است؟



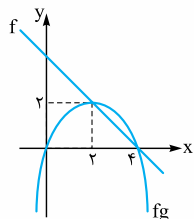
۲/۵ (۱)

۱/۵ (۲)

۴/۵ (۳)

۳/۵ (۴)

۹۰۹- نمودار تابع f و سهمی fg به صورت مقابل است. ضابطه $f+g$ کدام است؟



$-\frac{1}{2}x$ (۲)

$\frac{1}{2}x$ (۱)

$-\frac{1}{2}x + 4$ (۴)

$\frac{1}{2}x + 4$ (۳)

۹۱۰- اگر $f(x) = 2 - |x+1|$ و $g(x) = x + |x|$ ، آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

$(0, +\infty)$ (۴)

$(-\frac{1}{2}, +\infty)$ (۳)

$(-1, +\infty)$ (۲)

$(-\infty, \frac{1}{2})$ (۱)

۹۱۱- اگر $f(x) = x + |x| + 1$ و $g(x) = |x+1| + 1$ ، آنگاه برد تابع $(\frac{f}{g})(x)$ کدام است؟

$[1, +\infty)$ (۴)

$[0, +\infty)$ (۳)

$[0, 2)$ (۲)

$[0, 1)$ (۱)

ترکیب توابع

۹۱۲- اگر $f = \{(2, 3), (1, 2), (-1, 2), (3, 3)\}$ و $g = \{(2, 2), (3, 1), (-1, 3)\}$ ، آنگاه دامنه fog و برد gof چند عضو مشترک دارند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۱۳- اگر $f = \{(3, m^2), (2, 1), (5, -1), (-3, m), (-2, m), (3, m+2), (m, 4)\}$ یک تابع باشد، تابع fof کدام است؟

$\{(-3, 4), (-2, 4)\}$ (۴)

$\{(-3, 4), (5, 4), (-2, 4)\}$ (۳)

$\{(-3, 4), (2, 4)\}$ (۲)

$\{(-3, 4), (5, 4)\}$ (۱)

۹۱۴- به فرض آن که $f = \{(1, 3), (2, 5), (3, 2), (0, 1)\}$ و $g(x) = x - 4$ اگر $gof(a) = fog(4)$ ، مقدار a چه عددی است؟

صفر (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۹۱۵- اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و $g = \{(1, 2), (5, 4), (6, 5), (2, 3)\}$ و $g(f(a)) = 5$ باشد، عدد a کدام است؟

۲ (۴)

۳ (۳)

۴ (۲)

۱ (۱)

۹۱۶- تابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض اند. اگر $(4, 1) \in gof$ و $(4, 2) \in fog$ باشند، دوتایی

(a, b) کدام است؟

$(5, 4)$ (۴)

$(4, 5)$ (۳)

$(4, 3)$ (۲)

$(3, 4)$ (۱)

۹۱۷- اگر $f(x) = 2x^2 + 4$ و $fog(x) = 4x^2 + 6x$ ، مقدار $g(-2)$ کدام است؟

۲ (۴)

-۱ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

۹۱۸- اگر $g(x) = 2x + 3$ و $fog(x) = \frac{x}{x+1}$ ، مقدار $f(-5)$ چه عددی است؟

$-\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{5}{4}$ (۳)

$-\frac{4}{3}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)

۹۱۹- اگر خروجی از ماشین شکل زیر $\frac{4}{3}$ باشد، مقدار ورودی کدام است؟

خروجی $\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow 2x - 2 \Rightarrow$ ورودی

$\frac{7}{2}$ (۲)

$\frac{11}{9}$ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

۹۲۰- هرگاه $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = 3x + 2$ ، مقدار a کدام باشد تا $fog(2) = gof(a)$ برقرار باشد؟

$-\frac{8}{9}$ (۴)

$-\frac{1}{9}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{1}{3}$ (۱)

۹۲۱- اگر $f(x) = (2x-3)^2$ و $g(x) = x+2$ ، نمودارهای دو تابع f و fog با کدام طول متقاطع اند؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

۱ (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

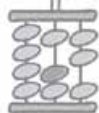
۹۲۲- اگر $f(x) = 8 - x$ و $g(x) = x^2 + 2x$ ، کدام خط هم تابع fog و هم تابع gof را قطع می کند؟

$y = -6$ (۴)

$y = 3$ (۳)

$y = -2$ (۲)

$y = 10$ (۱)



۹۲۳- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ و $g(x) = x+4$ باشند، جواب معادله $fog(x) = gogf(x)$ کدام است؟

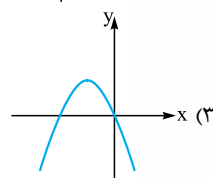
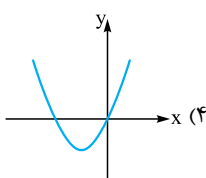
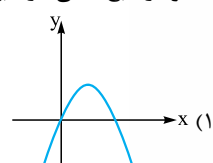
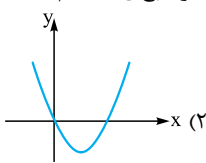
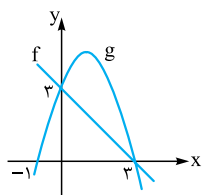
۱, ۷ (۴)

-۱, ۷ (۳)

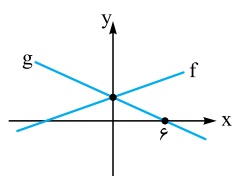
۱, -۷ (۲)

-۱, -۷ (۱)

۹۲۴- نمودار تابع خطی f و تابع سهمی g در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع fog کدام است؟



۹۲۵- توابع خطی f و g به صورت مقابل است. اگر $f+g$ ثابت و $f-g$ همانی باشد، حاصل $fog(-6)$ کدام است؟



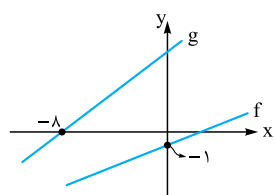
۹ (۲)

۶ (۱)

۴ (۴)

۸ (۳)

۹۲۶- توابع f و g به صورت مقابل است. اگر هر دو تابع $y = -7 + fog(x)$ و $y = -14 + gogf(x)$ همانی باشند، مقدار $f(2) + g(2)$ کدام است؟



۱۸ (۲)

۱۲ (۱)

۲۰ (۴)

۱۵ (۳)

۹۲۷- اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = x+a$ ، آن گاه به ازای چه مقدار a نمودار توابع fog و f فقط در نقطه‌ای به طول ۲ متقاطع‌اند؟

-۷ (۴)

-۵ (۳)

-۳ (۲)

صفر (۱)

۹۲۸- هرگاه $f(x) = x^2 + 2x$ و $g(x) = \sqrt{4x+4}$ ، مساحت ناحیه محدود به $y = k$ و $y = gogf(x)$ برابر ۹ است، مقدار k کدام است؟

۴ (۴)

۳√۲ (۳)

√۲ (۲)

۳ (۱)

۹۲۹- اگر $f(x) = 2 - |x-2|$ ، ضابطه تابع fog کدام است؟

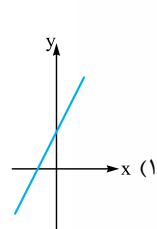
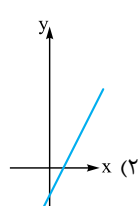
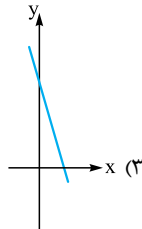
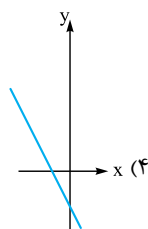
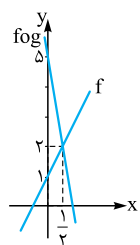
۲ - f(x) (۴)

f(x) (۳)

۴ - x (۲)

x (۱)

۹۳۰- نمودار توابع fog و f به صورت مقابل است. نمودار g کدام است؟



۹۳۱- اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $fog(x) = x^2 + 4x$ ، آن گاه $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

 $x^2 - 2x$ (۴) $x^2 - 2$ (۳) $x^2 + 2$ (۲) $x^2 + 2x$ (۱)

۹۳۲- به فرض آن که $g(x) = 2x - 1$ و $fog(x) = 4x^2 - 1$ ، ضابطه $gogf$ کدام است؟

 $2x^2 + 4x + 1$ (۴) $2x^2 + 4x - 1$ (۳) $x^2 + 2x$ (۲) $x^2 + 2x + 2$ (۱)

۹۳۳- اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطه تابع fog کدام است؟

 $4x^2 - 4x + 11$ (۴) $4x^2 - 2x + 13$ (۳) $2x^2 - 3x + 7$ (۲) $2x^2 - 7x + 3$ (۱)

۹۳۴- اگر $g(x) = 2x - 3$ و $fog(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند، $f(x)$ کدام است؟

 $x^2 - 2x + 3$ (۴) $x^2 - 2x + 5$ (۳) $x^2 - 4x + 5$ (۲) $x^2 - 4x + 3$ (۱)



۹۳۵- اگر $f(x) = 2(x-1)^2$ و $gof(x) = 6x - 3x^2$ ، آن گاه ضابطه $g(x)$ کدام است؟

- (۱) $3 + \frac{3x}{2}$ (۲) $2 - \frac{2x}{3}$ (۳) $3 - \frac{3x}{2}$ (۴) $2 + \frac{2x}{3}$

۹۳۶- اگر $f(2x-3) = 4x^2 - 14x + 13$ باشد، ضابطه $f(x)$ برابر کدام است؟

- (۱) $x^2 - x + 3$ (۲) $x^2 - 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 1$ (۴) $x^2 - x + 1$

۹۳۷- اگر $f(2x-1) = 4x^2 + 1$ باشد، ضریب x^2 در ضابطه $f(x)$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۸

۹۳۸- اگر $f(x) = \frac{x}{1+x}$ و $gof = fo \frac{1}{f}$ ، ضابطه تابع g کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{1-x}$ (۲) $\frac{x}{1-x}$ (۳) $\frac{x}{x+1}$ (۴) $\frac{1}{x+1}$

۹۳۹- اگر $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ و $g(x) = \frac{2x}{2x-1}$ ، آن گاه مجموع اعضای دامنه fog کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $1/25$ (۳) $1/5$ (۴) $1/75$

۹۴۰- هرگاه $g(x) = 3x - 1$ و $gof(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ ، دامنه تابع fog در کدام گزینه آمده است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $\mathbb{R} - \{-1\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$

۹۴۱- اگر $f(x) = \sqrt{4-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-2}$ ، دامنه fog بازه $[a, b]$ است. بیشترین مقدار $b-a$ چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲۰ (۳) ۱۶ (۴) ۱۵

۹۴۲- اگر $f(x-1) = \sqrt{2x-x^2}$ ، دامنه $y = f(x+1)$ کدام است؟

- (۱) $[0, 2]$ (۲) $[-2, 0]$ (۳) $[2, 4]$ (۴) $[-4, -2]$

۹۴۳- هرگاه دامنه تعریف تابع $y = f(x)$ بازه $[-2, 4]$ باشد، دامنه تابع $y = f(\frac{x}{3}) - 3f(2x+10)$ کدام بازه است؟

- (۱) $[-4, -3]$ (۲) $[-6, 3]$ (۳) $[-6, 8]$ (۴) $[-4, 2]$

۹۴۴- اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع gof کدام است؟

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $\{0\}$ (۳) $(-1, 1)$ (۴) $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

۹۴۵- اگر $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع gof کدام است؟

- (۱) $[0, 1)$ (۲) $[-1, 1]$ (۳) $\mathbb{R}$ (۴) $\mathbb{R} - (-1, 1)$

۹۴۶- با فرض $f(x) = \sqrt{3x-x^2-2}$ و $g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ ، دامنه تعریف تابع fog کدام است؟

- (۱) $[\frac{1}{3}, +\infty)$ (۲) $(0, \frac{1}{3}]$ (۳) $(0, 3]$ (۴) $[3, +\infty)$

۹۴۷- اگر $f(x) = \sqrt{x+|x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-4x}$ ، دامنه تعریف تابع gof کدام است؟

- (۱) $(0, 8) \cup (8, +\infty)$ (۲) $\mathbb{R} - \{0, 8\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{0\}$ (۴) $(0, +\infty)$

۹۴۸- با فرض $f(x) = \sqrt{(2x-5)(5-x)}$ و $g(x) = [x]$ ، دامنه تابع fog کدام است؟

- (۱) $[3, 5]$ (۲) $[3, 6)$ (۳) $[3, 6]$ (۴) $(1, 5]$

۹۴۹- اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2+2x)$ باشند، دامنه تابع fog کدام است؟

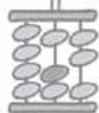
- (۱) $[-4, 2]$ (۲) $[-2, 0]$ (۳) $[-4, -1] \cup (1, 2]$ (۴) $[-4, -2) \cup (0, 2]$

۹۵۰- هرگاه $f(x) = \sqrt{2-\log_2(x-2)}$ ، دامنه $y = f(x+3)$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 7]$ (۲) $(-1, 8]$ (۳) $(5, 14]$ (۴) $[1, 11]$

۹۵۱- اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \log(x^2-15x)$ ، دامنه تعریف تابع fog شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۵ (۴) ۶



۹۵۲- اگر $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ و تابع $g(x) = \tan x, |x| < \frac{\pi}{4}$ باشد، دامنه تعریف تابع fog کدام است؟

- (۱) $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (۲) $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ (۳) $[-\frac{\pi}{4}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{4}]$ (۴) $[-1, 0) \cup (0, 1]$

۹۵۳- با فرض $f(x) = 3 + 2\sqrt{2-x}$ و $g(x) = \sqrt{m-x}$ دامنه تابع $g \circ f(x)$ یک مجموعه تک‌عضوی است. m کدام است؟

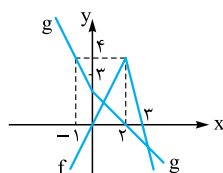
- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۶

۹۵۴- اگر $h(x) = \log(\sqrt{1-x^2} + 1)$ ، $f(x) = h(2x-1)$ و $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ ، آنگاه دامنه تابع fog کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R}$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[-1, 1]$ (۴) $[0, +\infty)$

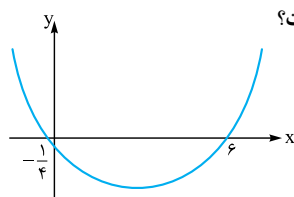
۹۵۵- نمودار توابع f و g به صورت مقابل است. مجموع اعضای صحیح عضو دامنه تابع $y = \frac{1}{\sqrt{fog(x)}}$ چه قدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴



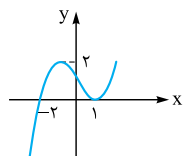
۹۵۶- نمودار سهمی f به صورت مقابل است. اگر $g(x) = x - \sqrt{x}$ ، آنگاه مجموع ریشه‌های معادله $fog(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) $\frac{37}{9}$ (۲) $\frac{37}{4}$ (۳) $\frac{17}{4}$ (۴) ۱۳



۹۵۷- تابع با ضابطه $g(x) = x - \sqrt{x}$ مفروض است. اگر نمودار تابع f محور xها را در دو نقطه به طول‌های ۶ و $-\frac{1}{4}$ قطع کند، آنگاه نمودار تابع fog، محور xها را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ و ۴ (۲) $\frac{1}{9}$ و ۹ (۳) $\frac{1}{4}$ و ۴ (۴) ۴ و ۹



۹۵۸- نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار $y = f \circ f$ در چند نقطه محور xها را قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۵۹- اگر $f(x) = x^2 + x - 2$ و $g(x) = \frac{1}{4}(x-3)$ ، مجموعه طول نقاطی از منحنی تابع fog که در زیر محور xها قرار می‌گیرند، برابر کدام بازه است؟

- (۱) $(-5, 1)$ (۲) $(-1, 5)$ (۳) $(-2, 1)$ (۴) $(1, 5)$

۹۶۰- تابع $f(x) = 3x - 7$ با دامنه $[-11, -1]$ مفروض است. برد تابع $y = f \circ f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

۹۶۱- دو تابع $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض‌اند. اگر $g(f(x)) = -2$ باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟

- (۱) $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ (۲) $\mathbb{R}$ (۳) $\mathbb{Z}$ (۴) $\emptyset$

۹۶۲- اگر $g(x) = 2x - 3$ و $fog(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ ، تابع f(x) در کدام بازه معکوس‌پذیر است؟

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $[-1, +\infty)$ (۳) $(-5, 2]$ (۴) $\mathbb{R}$

۹۶۳- دو تابع با ضابطه‌های $g = \{(2, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ و $f(x) = 2x - 5$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1} \circ g(a) = 6$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۶۴- دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، مقدار a کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{5}{2}$

۹۶۵- دو تابع $f = \{(5, 2), (7, 3), (1, 4), (3, 6), (9, 1)\}$ و $g(x) = \sqrt{5x + 9}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1} \circ f^{-1}(a) = 8$ باشد، a کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۷

۹۶۶- با فرض آن‌که $f = \{(3, 2), (5, -3), (m, n-1)\}$ و $g = \{(4, 3), (k, 1), (3, n)\}$ هرگاه $(2, -2) \in g^{-1} \circ f$ باشد، مقدار $f^{-1} \circ g(3)$ کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) -۲

۹۶۷- اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-1} \circ f) - f$ کدام است؟

- (۱) $\{-1, 4\}$ (۲) $\{2, 3\}$ (۳) $\{3, 4\}$ (۴) $\{2, -1\}$



۹۶۸- اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ باشند، تابع $\frac{g}{g \circ f^{-1}}$ کدام است؟

- (۱) $\{(4, 2), (5, 2)\}$ (۲) $\{(4, 2), (3, 5)\}$ (۳) $\{(5, 2), (2, 4)\}$ (۴) $\{(3, 5), (2, 4)\}$

۹۶۹- دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ و $g = \{(2, -1), (-1, 4), (3, -2), (-4, -3)\}$ مفروض‌اند. اگر $g^{-1}(f(a)) = 3$ باشد، a کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) ۴

۹۷۰- اگر $f(x) = \frac{2}{5}x - 4$ و $g(x) = x^2 + x$ باشند، مقدار $(g^{-1} \circ f^{-1})(8)$ کدام است؟

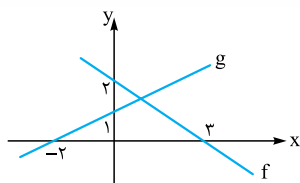
- (۱) $1/5$ (۲) ۲ (۳) $2/5$ (۴) ۳

۹۷۱- اگر $g^{-1}(x) = 3x + 9$ و $f \circ g(x) = \frac{2x}{x+1}$ ، آن‌گاه $f^{-1}(3)$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) -۳ (۴) -۴

۹۷۲- نمودار توابع خطی f و g به شکل مقابل است. مقدار $f^{-1} \circ g(2)$ چه عددی است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) ۰ (۳) -۲ (۴) $-\frac{1}{2}$



۹۷۳- اگر $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ باشد، نمودار توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ در کدام بازه بر هم منطبق‌اند؟

- (۱) $(-\infty, +\infty)$ (۲) $[-1, +\infty)$ (۳) $(-\infty, 2]$ (۴) $[-1, 2]$

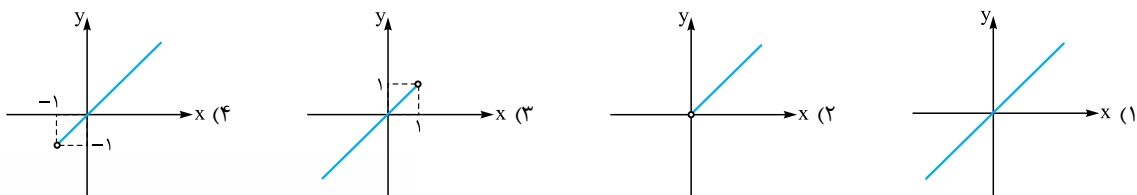
۹۷۴- اگر $f(x) = 5 - \sqrt{1-x}$ و $g(x) = f^{-1}(2-3x)$ باشد، دامنه تابع $g \circ f(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳۷ (۲) ۳۶ (۳) ۲۴ (۴) ۲۵

۹۷۵- اگر $f(x) = 2x + 1$ با دامنه تعریف $[-1, 4]$ داده شده باشد و $g(x) = f \circ f^{-1}(x)$ و $h(x) = f^{-1} \circ f(x)$ باشند، دامنه $h(x) - g(x)$ کدام است؟

- (۱) $[-1, 4]$ (۲) $[-1, 9]$ (۳) $[1, 4]$ (۴) $[1, 9]$

۹۷۶- اگر $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ، نمودار $y = f \circ f^{-1}(x)$ در کدام گزینه آورده شده است؟



۹۷۷- اگر $f(x) = 2x - \sqrt{2-x}$ باشد، مجموع اعضای صحیح دامنه تابع $g(x) = \sqrt{f(x) - f^{-1} \circ f(x)}$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۴ (۳) ۳ (۴) ۶

۹۷۸- اگر $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x+a}$ مقدار a کدام باشد تا $f \circ g(x) = x$ برقرار باشد؟

- (۱) ۳ (۲) -۳ (۳) -۱ (۴) ۱

۹۷۹- اگر $f(x) = \frac{3x+6}{4x-3}$ ، جواب معادله $f \circ f^{-1}(3x) = x$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) -۲ (۳) $-\frac{4}{3}$ (۴) ۲

۹۸۰- با فرض $f(x) = 3a - 2 + \sqrt{a-x}$ ، معادله $f \circ f^{-1}(x) = f \circ f^{-1}(x)$ فقط یک جواب دارد. جواب معادله $x + f^{-1}(x) = 0$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۹۸۱- اگر $f(x) = \frac{2-x^2}{x^2+3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ ، آن‌گاه ضابطه $g^{-1} \circ f^{-1}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3+2x}{2-2x}$ (۲) $\frac{3-2x}{2+2x}$ (۳) $\frac{2x-3}{2x+2}$ (۴) $\frac{2x+3}{2x-2}$

۹۸۲- دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = 4 + 2\sqrt[3]{x-2}$ مفروض‌اند. مجموع ریشه‌های متمایز معادله $f \circ g(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ کدام است؟

- (۱) ۱۱ (۲) ۱۰۰۱ (۳) ۹۹۸ (۴) ۱۸





۷۷۱-۳

$$\left. \begin{array}{l} (2, m+1) \in f \\ (2, m^2-5) \in f \end{array} \right\} \Rightarrow m^2-5=m+1$$

$$\Rightarrow m^2-m-6=0 \Rightarrow (m-3)(m+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=-2 \end{cases}$$

اگر $m=3$ باشد زوج مرتب $(2m+1, 3)$ به صورت $(7, 3)$ خواهد بود در این صورت چون $(7, 3)$ و $(7, 2)$ عضو این مجموعه هستند، f تابع نیست. اگر $m=-2$ باشد، داریم:

$$f = \{(-3, 3), (2, -1), (7, 2)\} \Rightarrow f(m-1) = f(-3) = 3$$

۷۷۲-۲

$$\left\{ \begin{array}{l} (3, m^2) \in f \\ (3, m+2) \in f \end{array} \right. \Rightarrow m^2=m+2 \Rightarrow m^2-m-2=0 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-1 \end{cases}$$

اگر $m=2$ باشد دو زوج مرتب $(2, 4)$ و $(2, 1)$ عضو R هستند و این رابطه تابع نخواهد بود.

پس $m=-1$ است. $R = \{(3, 1), (2, 1), (-3, -1), (-2, -1), (-1, 4)\}$

۷۷۳-۴

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$y^2 - y = 0 \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=1 \end{cases}$$

۱ اگر $x=1$ باشد، داریم:

پس y تابعی از x نیست.

۲ اگر $x=\frac{1}{4}$ باشد، داریم: $|\frac{1}{4}-1| + |y+1| = 1 \Rightarrow |y+1| = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y+1 = \frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{3}{4} \\ y+1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

پس y تابعی از x نیست.



۳ اگر $x = 1$ باشد:

$$|1-1| + |y^2-1| = 0 \Rightarrow |y^2-1| = 0 \Rightarrow y = \pm 1$$

پس y تابعی از x نیست.

۴ به کمک اتحاد مربع داریم:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = 0 \Rightarrow y = -x$$

پس y تابعی از x است.

۷۷۴-۴ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ اگر x هر عدد مثبت باشد، برای y دو مقدار قرینه هم ایجاد می‌شود.

$$y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

مثلاً اگر $x = 1$ باشد:

$$y^2 - y = 0 \Rightarrow y(y-1) = 0 \Rightarrow y = 0, y = 1$$

$$y^2 + y^2 = 0 \Rightarrow y^2(y+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

اگر $x = 0$ باشد:

$$۴ \text{ به کمک اتحاد مکعب } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ سمت}$$

چپ تساوی را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 1 = x \Rightarrow (y+1)^3 - 1 = x$$

$$\Rightarrow (y+1)^3 = x+1 \Rightarrow y+1 = \sqrt[3]{x+1} \Rightarrow y = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

چون به ازای هر x فقط یک عدد ایجاد می‌شود، پس y تابعی از x است.

۷۷۵-۲ ۱ نادرست است، زیرا اگر $x = 1$ باشد، $1 \leq y < 2$ خواهد بود.

۳ نادرست است، زیرا اگر مثلاً $x = 0$ باشد، $1 \leq y < 2$ خواهد بود.

۴ نادرست است، زیرا اگر $x = 0$ باشد، $-1 \leq y < 0$ است.

اما ۲ صحیح است، زیرا y تابعی از x است: $y[x] = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{[x]}$

۷۷۶-۳ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ اگر $x = 0$ باشد، آن‌گاه $[y] = 0$ است و $0 \leq y < 1$ خواهد بود، پس

به ازای هر x بی‌نهایت y وجود دارد. پس y تابعی از x نیست.

۲ می‌دانیم $[x] \in \mathbb{Z}$ است. اگر فرض کنیم $[x] = k$ ($k \in \mathbb{Z}$), پس

$\cos(k\pi)$ یا برابر ۱ است (اگر k زوج باشد) و یا برابر -1 (اگر k فرد باشد):

$$k = \text{زوج} \Rightarrow \frac{|y|}{y} = 1 \Rightarrow |y| = y \quad (۱)$$

$$k = \text{فرد} \Rightarrow \frac{|y|}{y} = -1 \Rightarrow |y| = -y \quad (۲)$$

در هر حالت (۱) y هر عدد دلخواه مثبت و در حالت (۲) y هر عدد دلخواه منفی است. پس y تابعی از x نیست.

۳ اگر $x > 0$ باشد، $\frac{x}{|x|} = 1$ و اگر $x < 0$ باشد، $\frac{x}{|x|} = -1$ است.

بنابراین $\sin \pi$ و $\sin(-\pi)$ ایجاد می‌شود که هر دو برابر صفر هستند. پس:

$$\begin{cases} x > 0 \Rightarrow |y| = 0 \\ x < 0 \Rightarrow |y| = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

پس به ازای هر x ($x \neq 0$) خروجی تابع صفر است. پس y تابع ثابت صفر است.

۴ اگر $x > 0$ باشد، داریم:

$$\frac{x}{|x|} = 1 \Rightarrow |y| = \cos 2\pi \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

پس به ازای هر $x > 0$, $y = \pm 1$ است. پس y تابعی از x نیست.

۷۷۷-۲ به کمک اتحاد مربع داریم:

$$x^2 + 4y^2 + 2x - 12y = k \Rightarrow (x^2 + 2x) + (4y^2 - 12y) = k$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 - 1 + (2y-3)^2 - 9 = k$$

$$\Rightarrow (x+1)^2 + (2y-3)^2 = k+10$$

اگر $k+10 > 0$ باشد، f تابع نیست و اگر $k+10 < 0$ باشد f مجموعه تهی خواهد شد. (زیرا مجموع مربعات دو عدد برابر یک عدد منفی نمی‌شود) پس باید $k+10 = 0$ باشد و در نتیجه $k = -10$ است.

۷۷۸-۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ اگر فرض کنیم $\frac{x}{y} = t$ است داریم:

$$t + \frac{1}{t} = 2 \xrightarrow{t \neq 0} t^2 + 1 = 2t \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow y = x$$

y تابعی از x است.

۲ اگر فرض کنیم $\frac{x}{y} = t$ است، داریم:

$$t - \frac{1}{t} = 1 \xrightarrow{t \neq 0} t^2 - 1 = t \Rightarrow t^2 - t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)y$$

در این حالت y تابعی از x نیست، زیرا مثلاً اگر $x = 1$ باشد دو مقدار $\frac{1}{1 \pm \sqrt{5}}$ برای y وجود دارد.

$$\frac{|y|}{x} = x+1 \xrightarrow{x \neq 0} |y| = x^2 + x$$

اگر $x = 1$ باشد داریم $|y| = 2$ و در نتیجه $y = \pm 2$ است. پس y تابعی از x نیست.

$$y^2 - 2y + 1 - x = 0$$

۴ معادله را به صورت مقابل می‌نویسیم: معادله فوق یک معادله درجه ۲ بر حسب متغیر y است، اگر $x = 1$ انتخاب شود ۲ مقدار زیر برای y وجود دارد:

$$x = 1 \Rightarrow y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y(y-2) = 0$$

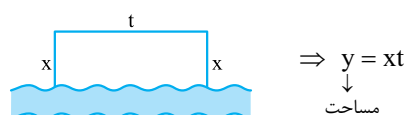
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow y \text{ تابعی از } x \text{ نیست.}$$

۷۷۹-۱ اگر تابع f شامل زوج مرتبی مانند (a, b) و تابع g شامل زوج

مرتبی مانند (a, c) باشد به طوری که $b \neq c$ باشد رابطه $f \cup g$ شامل هر دو زوج مرتب (a, b) و (a, c) است. در این صورت $f \cup g$ نمی‌تواند یک تابع باشد.

به کمک برهان خلف به راحتی می‌توان نشان داد روابط $f \pm g$ و $f \cap g$ تابع هستند.

۷۸۰-۴



$$\text{محیط} = 2x + t = 48 \Rightarrow t = 48 - 2x$$

$$\Rightarrow y = x(48 - 2x) = 48x - 2x^2$$

از طرفی چون $t \geq x$ است، داریم:

$$t = 48 - 2x \xrightarrow{t \geq x} x \leq 48 - 2x \Rightarrow 3x \leq 48$$

$$\Rightarrow x \leq 16 \Rightarrow 0 < x \leq 16$$

۷۸۱-۲ با توجه به شکل دو مثلث ACD و BED مشابه‌اند.

پس داریم:

$$\frac{AC}{DE} = \frac{CD}{EB} \Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{2}{y-2} \Rightarrow \frac{y-2}{2} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y-2 = \frac{2}{x-1}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{x-1} + 2 = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow S = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2} \times \frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$



۷۸۷-۱ ابتدا معادله خط d را می نویسیم:

۷۸۷-۲ با توجه به تعریف تابع f ، $D_f = A$ است و $R_f \subset A$ است؛ پس تابع f شامل ۵ زوج مرتب است که با توجه به آن $a + f(a)$ زوج است باید جمع دو مؤلفه هر زوج مرتب عضو این تابع زوج باشد:

$$f = \{(1, \text{○}), (2, \text{○}), (3, \text{○}), (4, \text{○}), (5, \text{○})\}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 حالت ۳ حالت ۲ حالت ۳ حالت ۲ حالت ۳
 ۱, ۳, ۵ ۲, ۴ ۱, ۳, ۵ ۲, ۴ ۱, ۳, ۵

$$\Rightarrow \text{تعداد توابع} = 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 4 \times 27 = 108$$

۷۸۸-۱ با توجه به آن که دامنه f مجموعه $\{3, 2, -1, 1\}$ است، جواب های معادله زیرمجموعه این مجموعه است. حال این اعداد را در تساوی چک می کنیم و عددی که تساوی را برقرار کند، جواب معادله است.

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = f(2 - f(1)) \Rightarrow f(1) = f(2)$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ جواب نیست.}$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = f(2 - f(-1)) \Rightarrow f(-1) = f(-1)$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ یک جواب معادله است.}$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = f(2 - f(2)) \Rightarrow f(2) = f(-1)$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ یک جواب معادله است.}$$

$$x = 3 \Rightarrow f(3) = f(2 - f(3)) \Rightarrow f(3) = f(-1)$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ یک جواب معادله است.}$$

پس معادله دارای سه جواب -1 ، 2 و 3 است که حاصل ضرب آن ها -6 است.

۷۸۹-۴ ابتدا به جای x در دو طرف تساوی ۳ قرار می دهیم تا $f(2)$

$$x = 3 \Rightarrow f(3-1) + f(2) = \sqrt{3+1} - 4$$

$$\Rightarrow 2f(2) = 2-4 \Rightarrow 2f(2) = -2 \Rightarrow f(2) = -1$$

$$\Rightarrow f(x-1) - 1 = \sqrt{x+1} - 4$$

برای محاسبه $f(7)$ کافی است در تابع بالا به جای x ، ۸ قرار دهیم:

$$x = 8 \Rightarrow f(8-1) - 1 = \sqrt{8+1} - 4$$

$$\Rightarrow f(7) - 1 = 3-4 \Rightarrow f(7) = 0$$

۷۹۰-۲ چون f تابع است، باید مقدار عبارت $\frac{x^2 + 2x + a}{x^2 + 2x + 3}$ و $2x - 2$ به ازای $x = 2$ یکسان باشد:

$$\xrightarrow{x=2} \frac{4+4+a}{4+4+3} = 2 \Rightarrow \frac{8+a}{11} = 2 \Rightarrow a = 14$$

چون $2 < \sqrt{2} - 1$ است، پس برای محاسبه $f(\sqrt{2}-1)$ از ضابطه اول استفاده می کنیم. به کمک مربع سازی ابتدا تابع را ساده می کنیم و سپس $\sqrt{2}-1$ را به جای x قرار می دهیم:

$$x \leq 2: f(x) = \frac{x^2 + 2x + 14}{x^2 + 2x + 3} = \frac{(x+1)^2 + 13}{(x+1)^2 + 2}$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{2}-1) = \frac{(\sqrt{2}-1+1)^2 + 13}{(\sqrt{2}-1+1)^2 + 2} = \frac{15}{4}$$

۷۹۱-۴ اگر فرض کنیم $x + \frac{2}{x} = t$ است، به کمک اتحاد زیر:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab(a+b)$$

۷۸۷-۲ ابتدا معادله خط d را می نویسیم:

$$\begin{cases} (4,0) \in d \\ (0,2) \in d \end{cases} \Rightarrow \text{شیب } d = \frac{2-0}{0-4} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$$

اگر مختصات طول نقطه M واقع بر خط d را x فرض کنیم، مختصات عرض آن

$$S = xy = x(-\frac{1}{2}x + 2) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

برابر $-\frac{1}{2}x + 2$ است. پس:

با توجه به شکل و مثبت بودن مساحت باید $0 < x < 4$ باشد.

۷۸۸-۱ با توجه به شکل اگر شعاع کره R و شعاع قاعده مخروط r باشد، داریم:

$$\begin{cases} h = R + x \xrightarrow{R=5} x = h - 5 \\ x^2 + r^2 = R^2 \xrightarrow{R=5} r^2 = 25 - x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow r^2 = 25 - (h-5)^2 = 25 - (h^2 - 10h + 25) = 10h - h^2$$

می دانیم حجم مخروط برابر است با $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ پس:

$$V = \frac{1}{3}\pi(10h - h^2)h = \frac{\pi}{3}(10h^2 - h^3)$$

۷۸۹-۲ اگر x برحسب رادیان باشد کسری $\frac{x}{2\pi}$ که نشان می دهد قطع OAB چه کسری از مساحت کل دایره است چون مساحت دایره برابر πR^2 است، پس:

$$S_{OAB} = \frac{x}{2\pi} \times \pi R^2 = \frac{x}{2} \times R^2$$

در هر مثلث به اضلاع a و b که زاویه بین این دو ضلع باشد مساحت

$$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \times OB \times \sin x$$

$$\xrightarrow{OA=OB=R} S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} R^2 \sin x$$

چون $R = 2$ است:

$$S_{\text{رنگی}} = S_{OAB} - S_{\triangle OAB} = 2x - 2 \sin x = 2(x - \sin x)$$

۷۸۵-۲ با توجه به آن که $f: A \rightarrow A$ تعریف شده است. دامنه تابع

f مجموعه A و برد آن نیز زیرمجموعه مجموعه A است؛ پس تابع f شامل ۵ زوج مرتب است، چون $f(1) = 1$ است، پس $(1,1) \in f$ است و در نتیجه:

$$f = \{(1,1), (2, \text{○}), (3, \text{○}), (4, \text{○}), (5, \text{○})\}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 حالت ۵ حالت ۵ حالت ۵ حالت ۵ حالت ۵
 ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ ۱, ۲, ۳, ۴, ۵

$$\Rightarrow \text{تعداد تابع} = 5^4$$

تذکره اگر در تابع f داشته باشیم $f: A \rightarrow B$ ، $D_f = A$ است و $R_f \subset B$ است.

۷۸۶-۳ در تابع f داریم $f: A \rightarrow B$. پس $A = D_f$ و $R_f \subset B$ است.

در نتیجه تابع f شامل ۴ زوج مرتب است که در آن $f(2) \neq b$ است؛ یعنی $f \notin (2, b)$ است. پس:

$$f = \{(1, \text{○}), (2, \text{○}), (3, \text{○}), (4, \text{○})\}$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 حالت ۳ حالت ۲ حالت ۳ حالت ۲
 a, b, c a, c a, b, c a, b, c





داریم:

$$\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} + 2 \times x \times \frac{2}{x} = t^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 = t^2 \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = t^2 - 4 \Rightarrow f(t) = t^2 - 4$$

اگر $t = \sqrt{10}$ باشد، داریم:

$$f(\sqrt{10}) = \sqrt{10}^2 - 4 = 10 - 4 = 6$$

تذکره $\sqrt{10}$ در برد تابع $y = x + \frac{2}{x}$ قرار دارد.**۷۹۲-۱** در تساوی زیر یک بار به جای x ، 3 و یک بار -3 قرار می‌دهیم و دستگاه زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f(x) + xf(-x) &= x + 3 \\ \xrightarrow{x=3} \begin{cases} f(3) + 3f(-3) &= 6 \\ f(-3) - 3f(3) &= 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f(3) + 3f(-3) &= 6 \\ -3f(-3) + 9f(3) &= 0 \end{cases} \\ \xrightarrow{x=-3} & \Rightarrow \begin{cases} f(3) + 3f(-3) &= 6 \\ -3f(-3) + 9f(3) &= 0 \end{cases} \\ 10f(3) &= 6 \Rightarrow f(3) = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

۷۹۳-۳ در تساوی زیر یک بار به جای x ، 2 و یک بار $\frac{1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) &= x^2 + \frac{1}{x} \xrightarrow{x=2} f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f(2) = 4 + \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} f(2) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} + 2 \end{aligned}$$

به کمک حل دستگاه زیر، $f(2)$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f(2) &= \frac{9}{2} \\ f(2) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{9}{4} \end{cases} &\xrightarrow{\times 2} \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f(2) &= \frac{9}{2} \\ 2f(2) - 4f\left(\frac{1}{2}\right) &= 9 \end{cases} \\ \xrightarrow{+(-3)} & \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f(2) &= \frac{9}{2} \\ -3f(2) &= 9 + \frac{9}{2} \end{cases} \\ f(2) &= -3 - \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$

۷۹۴-۱ در معادله زیر یک بار به جای x ، 3 و بار دیگر $-\frac{1}{3}$ قرار می‌دهیم و دستگاه ایجادشده را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) - 3f\left(-\frac{1}{x}\right) &= 6x + \frac{3}{x} \\ \begin{cases} x=3 \Rightarrow f(3) - 3f\left(-\frac{1}{3}\right) &= 18 + 1 \\ x=-\frac{1}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) - 3f(3) &= -2 - 9 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f(3) - 3f\left(-\frac{1}{3}\right) &= 19 \\ f\left(-\frac{1}{3}\right) - 3f(3) &= -11 \end{cases} \\ \text{دو معادله فوق را با هم جمع می‌کنیم:} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{+} & \begin{cases} f(3) - 3f\left(-\frac{1}{3}\right) &= 19 \\ 3f\left(-\frac{1}{3}\right) - 9f(3) &= -33 \end{cases} \\ \xrightarrow{\times 3} & \begin{cases} f(3) - 3f\left(-\frac{1}{3}\right) &= 19 \\ f(3) - 9f\left(-\frac{1}{3}\right) &= -14 \end{cases} \\ \Rightarrow -8f(3) &= -14 \Rightarrow f(3) = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

۷۹۵-۳ باید توابع زیر رادیکال نامنفی باشند:

$$\begin{aligned} 4x - x^2 \geq 0 &\Rightarrow x(4-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4 \quad (1) \\ 2x - x^2 + 3 \geq 0 &\Rightarrow -(x+1)(x-3) \geq 0 \\ \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} \Rightarrow D_f = [0, 4] \cap [-1, 3] = [0, 3]$$

پس دامنه تابع f شامل 4 عدد صحیح صفر، 1 ، 2 و 3 است.**۷۹۶-۴** اعداد زیر رادیکال با فرجه فرد هر عدد حقیقی می‌توانند باشند:پس فقط محدودیت را فرجه 4 ایجاد کرده است. باید مقادیر زیر رادیکال با فرجه زوج نامنفی باشد:

$$\frac{2}{x^2} - \frac{9}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2} \geq \frac{9}{2}$$

چون $x^2 \geq 0$ است با شرط آن که $x \neq 0$ است دو طرف نامعادله را در $2x^2$ ضرب می‌کنیم:

$$9x^2 \leq 4 \Rightarrow x^2 \leq \frac{4}{9} \Rightarrow |x| \leq \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$$

اما $x \neq 0$ است، پس: $D = \left[-\frac{2}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{2}{3}\right]$ **۷۹۷-۲** چون دامنه تابع شامل 2 عدد حقیقی نمی‌شود، پس مخرج دارای 2 ریشه حقیقی است:

$$x^2 + 6x^2 + ax = 0 \Rightarrow x(x^2 + 6x + a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{یا} \\ x^2 + 6x + a = 0 \end{cases}$$

معادله بالا دارای یک ریشه $x = 0$ است. پس باید معادله $x^2 + 6x + a = 0$ فقط یک ریشه داشته باشد، در نتیجه Δ آن برابر صفر است:

$$\Delta = 36 - 4a = 0 \Rightarrow 4a = 36 \Rightarrow a = 9$$

۷۹۸-۴ چون دامنه این تابع به صورت $\mathbb{R} - \{b\}$ است پس مخرج کسر به ازای فقط یک، که همان b باشد، صفر می‌شود؛ پس تابع درجه دوم مخرج ریشه مضاعف b دارد. پس Δ مخرج برابر صفر است.

$$\begin{aligned} \Delta &= 8^2 - 4a = 0 \Rightarrow 4a = 64 \Rightarrow a = 8 \\ \Rightarrow A &= 2x^2 + 8x + 8 = 2(x^2 + 4x + 4) = 2(x+2)^2 \\ \Rightarrow A &= 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a + b = 8 - 2 = 6 \end{aligned}$$

۷۹۹-۲ چون دامنه تابع به صورت بازه $[2, +\infty)$ است، پس تابع زیر رادیکال نمی‌تواند یک تابع درجه دوم باشد، زیرا اگر این تابع یک ریشه داشته باشد علامت عبارت قبل و بعد از ریشه یکسان است. (اگر ضریب x^2 مثبت باشد مثبت است و اگر منفی باشد منفی است) پس تابع زیر رادیکال یک تابع درجه اول است و $a = 0$ است. از طرفی 2 ریشه این معادله است:

$$A = bx + c \xrightarrow{\frac{x=2}{A=0}} 2b + c = 0$$

از طرفی $f(6) = 4$ است، پس: $6b + c = 16 \Rightarrow 4b + c = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow c = -16$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{4x - 16} \Rightarrow f(11) = \sqrt{44 - 16} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

۸۰۰-۲ برای آن که عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره نامنفی باشد باید $\Delta \leq 0$ و $a > 0$ باشد.اگر عبارت درجه دوم زیر رادیکال همواره نامنفی باشد دامنه تابع برابر $\mathbb{R}$ است. پس باید:

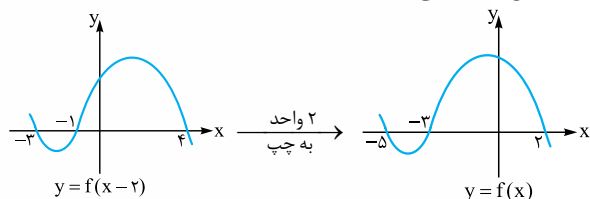
$$\begin{cases} \Delta = (-4)^2 - 4m(3+m) \leq 0 \Rightarrow 4 - m(3+m) \leq 0 \\ \Rightarrow -m^2 - 3m + 4 \leq 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -m^2 - 3m + 4 \leq 0 \Rightarrow -(m^2 + 3m - 4) \leq 0 \\ \Rightarrow -(m+4)(m-1) \leq 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \leq -4 \text{ یا } m \geq 1 \\ m > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} m \geq 1$$



۸۰۵-۴ اگر تابع f را ۲ واحد به سمت راست ببریم تابع $y = f(x-2)$ ایجاد می‌شود؛ پس اگر تابع $y = f(x-2)$ را دو واحد به سمت چپ ببریم، نمودار تابع f ایجاد می‌شود:



باید $xf(x) \geq 0$ باشد پس به کمک جدول تعیین علامت این نامعادله را حل می‌کنیم:

f در این بازه‌ها زیر محور x است f در این بازه‌ها بالای محور x است

	-5	-3	0	2	
$f(x)$	+	-	+	+	-
x	-	-	-	+	+
$xf(x)$	-	+	-	+	-

$$xf(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [-5, -3] \cup [0, 2]$$

۸۰۶-۴ می‌دانیم اگر $k \in \mathbb{Z}$ باشد $[x+k] = [x] + k$ است. پس $[x+1] = [x] + 1$.

برای تعیین دامنه، باید تابع زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$$2[x] - [x+1] \geq 0 \Rightarrow 2[x] - ([x] + 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow 2[x] - [x] - 1 \geq 0 \Rightarrow [x] \geq 1$$

جزء صحیح اعداد بزرگ‌تر یا مساوی ۱، از ۱ بزرگ‌ترند پس $x \geq 1$ است.

۸۰۷-۳ اولاً باید تابع ورودی لگاریتم مثبت باشد و ثانیاً تابع زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$$\begin{cases} 3-x > 0 \Rightarrow x < 3 & (1) \\ 2 - \log(3-x) \geq 0 \Rightarrow \log(3-x) \leq 2 \\ \log 100 & \downarrow \\ \Rightarrow \log(3-x) \leq \log 100 \Rightarrow 3-x \leq 100 \\ \Rightarrow -97 \leq x & (2) \end{cases}$$

از اشتراک دو شرط (۱) و (۲) داریم:

$$(1) \cap (2) \Rightarrow (-\infty, 3) \cap [-97, +\infty) = [-97, 3)$$

تذکره اگر $a > 1$ باشد و داشته باشیم $\log_a c < \log_a b$ داریم $c < b$ است و برعکس.

۸۰۸-۲ اگر $y = \log_a g(x)$ باشد باید $g(x) > 0$ باشد، پس:

$$f(x) = \log_2(1 - \log(x-2))$$

$$\begin{cases} (1): x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \\ (2): 1 - \log(x-2) > 0 \Rightarrow \log(x-2) < 1 \\ \Rightarrow \log(x-2) < \log 10 \Rightarrow x-2 < 10 \Rightarrow x < 12 \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow (-\infty, 12) \cap (2, +\infty) = (2, 12)$$

۸۰۹-۱ در تابع $y = \log_{g(x)} f(x)$ باید $f(x) > 0$ و $g(x) > 0$ و $g(x) \neq 1$ باشد. پس:

$$\begin{cases} x-a > 0 \Rightarrow a < x \\ b-x > 0 \Rightarrow x < b \\ b-x \neq 1 \Rightarrow x \neq b-1 \end{cases} \Rightarrow a < x < b$$

۸۰۱-۱ ضابطه توابع خطی f و g را می‌نویسیم. تابع f از نقاط $(0, -1)$ و $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ عبور می‌کند، پس:

$$\text{شیب } f = \frac{-1 - \frac{1}{5}}{0 - \frac{2}{5}} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{2}{5}} = 3 \Rightarrow f(x) = 3x + b$$

$$(0, -1) \in f \Rightarrow b = -1 \Rightarrow f(x) = 3x - 1$$

$$\text{شیب } g = \frac{\frac{1}{5} - 1}{\frac{2}{5} - 0} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{2}{5}} = -2 \Rightarrow g(x) = -2x + b$$

$$(0, 1) \in g \Rightarrow b = 1 \Rightarrow g(x) = -2x + 1$$

$$y = \sqrt{f(x) \cdot g(x)} = \sqrt{(3x-1)(-2x+1)}$$

در نتیجه:

باید زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$$(3x-1)(-2x+1) \geq 0 \Rightarrow x \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$$

۸۰۲-۴ دامنه تابع f بازه $[-4, 2]$ است که در این بازه ریشه‌های -3 ، 1 و 2 دارد. به کمک جدول تعیین علامت تابع f می‌توانیم مجموعه جواب نامعادله $xf(x) \geq 0$ را به دست آوریم:

x	-4	-3	0	1	2	
$f(x)$	تن	+	-	-	+	تن
x	-	-	-	+	+	+
$xf(x)$	تن	-	+	-	+	تن

$$xf(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [-3, 0] \cup [1, 2]$$

۸۰۳-۳ باید عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد؛ پس باید $\frac{x-1}{f(x)} \geq 0$

باشد. با توجه به نمودار تابع f و به کمک جدول تعیین علامت زیر می‌توانیم این نامعادله را حل کنیم:

تابع f بالای محور x است تابع f زیر محور x است

	-5	-4	1	2	3	
$f(x)$	تن	+	-	-	+	تن
$x-1$	-	-	-	+	+	+
$\frac{x-1}{f(x)}$	تن	-	+	-	+	تن

$$\Rightarrow D = (-4, 1] \cup (2, 3)$$

۸۰۴-۴ با توجه به نمودار تابع f ، $f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم و سپس دامنه این تابع



$y = \sqrt{(x+1)f(x)}$ را به دست می‌آوریم:

	-3	-1	2	
$f(x)$	-	+	-	+
$x+1$	-	-	+	+
	+	-	-	+

$$(x+1)f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in (\mathbb{R} - (-3, 2)) \cup \{-1\}$$

تذکره چون در صورت سؤال گفته شده است، تابع f تابع غیر نقطه‌ای است (هر چند هیچ تعریفی از چنین تابعی در کتاب‌های درسی وجود ندارد). احتمالاً منظور طراح حذف -1 از دامنه بوده است و جواب را $\mathbb{R} - (-3, 2)$ در نظر گرفته است.



پس $a=2$ و $b=4$ است در نتیجه:

$$x \neq 4-1=3 \Rightarrow c=3 \Rightarrow a+b+c=2+4+3=9$$

۸۱۰-۳ می‌دانیم باید جلوی لگاریتم عددی مثبت باشد پس باید:

$$[x]f(x) > 0$$

به کمک جدول تعیین علامت این معادله را حل می‌کنیم. با توجه به شکل تابع f می‌توانیم علامت $f(x)$ را تعیین کنیم. از طرفی می‌دانیم اگر $0 \leq x < 1$ باشد $[x]=0$ است و به ازای $x > 1$ ، $[x] > 0$ و به ازای $x < 0$ ، $[x] < 0$ است. پس:

	-2	-1	0	1	3	
$f(x)$	تن	+	-	-	+	تن
$[x]$	-	-	-	صفر	+	+
$[x]f(x)$	تن	-	+	صفر	+	تن

$$[x]f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (1, 3)$$

۸۱۱-۳ با توجه به آن که مخرج تنها دارای یک ریشه n است، پس $\Delta = 0$:

$$a^2 - 8b = 0 \Rightarrow a^2 = 8b$$

$$\text{ریشه مضاعف مخرج} = \frac{-a}{4} = n \Rightarrow a = -4n$$

چون n عددی طبیعی است، پس a عدد صحیح منفی است. از طرفی چون $a^2 = 8b$ است، داریم:

$$y = \log \frac{x+a}{b-x} \Rightarrow \frac{x+a}{\frac{a^2}{\lambda} - x} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -a < x < \frac{a^2}{\lambda} \\ \text{یا} \\ \frac{a^2}{\lambda} < x < -a \end{cases}$$

چون $a = -4n$ است، پس حالات زیر را داریم:

$$a = -4 \Rightarrow 2 < x < 4 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = \{3\}$$

$$a = -8 \Rightarrow 8 < x < 16 \quad \times$$

$$a = -12 \Rightarrow 12 < x < 18 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{13, 14, 15, 16, 17\}$$

پس اگر $n=3$ باشد $a=-12$ و $b=18$ و شرایط مسئله برقرار است.

تذکره با عددگذاری و چک تک تک گزینه‌ها هم می‌توانستید به ۳ برسید!

۸۱۲-۴ توابع f و g زمانی برابرند که اولاً $D_f = D_g$ و ثانیاً $f(x) = g(x)$. در هر گزینه برابری دو تابع را بررسی می‌کنیم.

$$\text{۱} \begin{cases} D_f = [3, +\infty) \\ D_g = (-\infty, 2] \cup [3, +\infty) \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

$$\text{۲} \begin{cases} D_f = \mathbb{R} - \{0\} \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

$$\text{۳} \begin{cases} D_f = [0, +\infty) \\ D_g = \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

$$\text{۴} f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ \frac{x}{|x|} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$D_f = D_g = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ -\frac{x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

پس در ۴ $f = g$ است.

۸۱۳-۲ باید $D_f = D_g$ و $f(x) = g(x)$ باشد؛ پس به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

$$D_f : \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq 1 \quad \text{۱}$$

$$D_g : \begin{cases} 2x-2 \geq 0 \\ 2x+2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \geq 1$$

$$\Rightarrow D_f = D_g$$

اما واضح است $f(x) \neq g(x)$ است. مثلاً: $(g(x) = \sqrt{2} f(x))$

$$f(1) = \sqrt{2}, g(1) = 2 \Rightarrow f(1) \neq g(1)$$

$$D_f : \begin{cases} 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \\ x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow D_f = [-2, 4] \quad \text{۲}$$

$$D_g : -x^2 + 2x + 8 \geq 0 \Rightarrow -(x-4)(x+2) \geq 0 \Rightarrow D_g = [-2, 4]$$

پس دامنه‌های f و g برابرند. از طرفی ضابطه‌های آن‌ها نیز یکسان است:

$$f(x) = \sqrt{4-x} \times \sqrt{2+x} = \sqrt{(4-x)(2+x)} = \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$$

پس $f = g$ است.

$$D_f : \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x > 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x > 3 \quad \text{۳}$$

$$D_g : \frac{x-2}{x-3} \geq 0 \Rightarrow x < 2 \text{ یا } x > 3$$

$$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

۴ می‌دانیم $\sqrt{a^2} = |a|$ است. پس:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x+3} = \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x+3} = \frac{|x-1|}{x+3} \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

پس ضابطه f و g یکسان نیست، در نتیجه دو تابع برابر نیستند.

۸۱۴-۲ $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ است؛ پس باید $D_g = \mathbb{R} - \{1\}$ باشد. در

نتیجه مخرج کسر y باید یک ریشه مضاعف ۱ داشته باشد. یعنی:

$$x^2 + ax + b = (x-1)^2 \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 1 \end{cases}$$

حال باید ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ برابر باشند:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{x-1} \\ g(x) = \frac{x^2 + cx + d}{(x-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = \frac{x^2 + cx + d}{(x-1)^2}$$

$$\xrightarrow{\times \frac{(x-1)^2}{x-1}} (x+2)(x-1) = x^2 + cx + d$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 = x^2 + cx + d$$

چون تساوی فوق باید همواره برقرار باشد، پس $c=1$ و $d=-2$ است. در

نتیجه $c+d=-1$ است.

۸۱۵-۳ به بررسی گزینه‌های می‌پردازیم. باید $D_f = D_g$ و $f(x) = g(x)$ باشد.

$$D_f : (x-1)(x+2) \geq 0 \Rightarrow D_f = [1, +\infty) \cup \{-2\} \quad \text{۱ و ۲}$$

$$D_g : x-1 \geq 0 \Rightarrow D_g = [1, +\infty)$$



است. پس اگر $x \notin \mathbb{Z}$ مخرج صفر می شود. در نتیجه $D_g = \mathbb{Z}$ است. اما اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد $g(x) = 1$ است و چون $f(x) = 0$ است، f و g برابر نیستند.

۲. $-\cos^2 \pi x \leq 0$ است. چون زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس باید $\cos \pi x = 0$ باشد.

$$\cos \pi x = 0 \Rightarrow \pi x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)}{2}$$

پس دامنه g ، اعداد صحیح نمی باشد. در نتیجه $D_f \neq D_g$ ، پس $f \neq g$.

۳. $-\sin^2 \pi x \leq 0$ است. چون زیر رادیکال باید نامنفی باشد، پس باید $\sin \pi x = 0$ باشد.

$$\sin \pi x = 0 \Rightarrow \pi x = k\pi \Rightarrow x = k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

پس $D_g = \mathbb{Z}$ و اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد، $-\sin^2 \pi x = 0$ است و در نتیجه $g(x) = 0$ است.

پس $D_f = D_g$ و $f(x) = g(x) = 0$ است، پس $f = g$ است.

۴. $D_g = \mathbb{R}$ است. پس $f \neq g$ نیست. هر چند چون $1 < \frac{x^2}{x^2+1} \leq 0$ است، $g(x) = 0$ است.

۸۱۸-۱. راه اول، صورت و مخرج تابع f را در مزدوج مخرج یعنی $|x+1| + x$ ضرب می کنیم: $(x \neq -\frac{1}{2})$

$$f(x) = \frac{2x+1}{|x+1|-x} \times \frac{|x+1|+x}{|x+1|+x} = \frac{(2x+1)(x+|x+1|)}{|x+1|^2 - x^2}$$

چون $|x+1|^2 = (x+1)^2$ است، داریم:

$$f(x) = \frac{(2x+1)(x+|x+1|)}{(x+1)^2 - x^2} = \frac{(2x+1)(x+|x+1|)}{2x+1}$$

پس $a=1$ است. $\frac{x+1}{x+1} = 1$

تذکره: $f(-\frac{1}{2}) = 0$ است و به ازای $a=1$ ، $g(-\frac{1}{2}) = 0$ است پس

همواره به ازای $a=1$ دو تابع f و g برابرند.

راه دوم: با عددگذاری می توانیم a را حساب کنیم. $f(0) = 1$ است؛ پس

باید $g(0) = 1$ باشد: $g(0) = |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$

از طرفی $f(-\frac{1}{2}) = 0$ است پس باید $g(-\frac{1}{2}) = 0$ باشد:

$$g(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}a + |-\frac{1}{2} + a|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \Rightarrow g(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + |-\frac{1}{2} + 1| = 0 \\ a=-1 \Rightarrow g(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + |-\frac{1}{2} - 1| = 2 \end{cases}$$

پس باید $a=1$ باشد.

۸۱۹-۴. دو تابع زمانی با یکدیگر برابرند که اولاً دامنه آن ها و ثانیاً ضابطه

آن ها برابر باشند.

دامنه تابع $y = \log \frac{x-2}{x}$ را تعیین می کنیم:

$$\frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

گزینه ای پاسخ صحیح است که دامنه آن با دامنه تابع فوق یکسان و ضابطه

آن برابر باشد:

$$1. y = \log(x-2) - \log x \Rightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ \text{و} \\ x > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x > 2 \Rightarrow$ دامنه ها یکسان نیست.

توجه کنید که در تابع f اگر $x = -2$ باشد، زیر رادیکال صفر می شود. پس $x = -2$ هم عضو دامنه f است. تابع g در 1 و 2 یکسان است، زیرا اگر $x \geq 1$ باشد $x+2 > 0$ است و احتیاجی به قدرمطلق نیست. پس مشکل عدم تساوی توابع f و g در 1 و 2 عدم تساوی دامنه این توابع است.

$$\begin{cases} D_f: (x+2)(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty) \\ D_g: x+2 \geq 0 \Rightarrow D_g = [-2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g \quad 3$$

توجه کنید که در دامنه تابع f درست است که $x=1$ هم باعث صفر شدن زیر رادیکال می شود، اما $1 \in [-2, +\infty)$ است و دامنه بدون تغییر است.

چون در بازه $[-2, +\infty)$ ، $x-1$ می تواند هم مثبت و هم منفی باشد، پس

$\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$ است. در نتیجه $D_f = D_g$ و $f(x) = g(x)$ است. پس $f = g$ است.

$$D_f: -x^2 \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, 0] \quad 4$$

$$D_g: -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow D_g = (-\infty, 0]$$

اما ضابطه f و g یکسان نیست. زیرا:

$$f(x) = \sqrt{-x^3} = \sqrt{-x \times x^2} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{-x} = |x| \sqrt{-x}$$

پس $f(x) \geq 0$ است، در حالی که $g(x) \leq 0$ است. مثلاً $f(-1) = 1$ است، ولی $g(-1) = -1$ است.

۸۱۶-۴. ابتدا ضابطه f را به ازای $x \neq \pm 1$ ساده می کنیم:

$$\begin{aligned} x \neq \pm 1: f(x) &= \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} = \frac{(x^3 - x) + (2x^2 - 2)}{x^2 - 1} \\ &= \frac{x(x^2 - 1) + 2(x^2 - 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x + 2)}{x^2 - 1} = x + 2 \end{aligned}$$

پس اگر $x \neq \pm 1$ باشد، $f(x) = x+2$ است، چون $f(x) = g(x)$ است،

پس $c=2$ است. از طرفی باید $g(1) = f(1)$ و $g(-1) = f(-1)$ نیز

باشد، پس:

$$\begin{cases} f(1) = \frac{a+2}{1+b} \Rightarrow \frac{a+2}{b+1} = 3 \Rightarrow a+2 = 3b+3 \Rightarrow a-3b=1 \\ g(1) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(-1) = \frac{-a+2}{b-1} \Rightarrow \frac{-a+2}{b-1} = 1 \Rightarrow -a+2 = b-1 \\ g(-1) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -a-b = -3$$

از حل دستگاه زیر داریم:

$$\begin{cases} a-3b=1 \\ -a-b=-3 \end{cases} \Rightarrow -4b=-2 \Rightarrow b=\frac{1}{2}, a=\frac{5}{2}$$

$$\text{پس } b+c = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

۸۱۷-۳. ابتدا دامنه تابع f را پیدا می کنیم.

$$\text{می دانیم } [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

خواهد شد و اگر $x \in \mathbb{Z}$ باشد زیر رادیکال صفر خواهد شد. پس $D_f = \mathbb{Z}$ است و $f(x) = 0$ است. حال دامنه و ضابطه توابع در هر گزینه را پیدا می کنیم.

۱. چون ۱ عدد صحیح است از جزء صحیح خارج می شود و مخرج به صورت مقابل است:

$$[x] + [1-x] = [x] + [-x] + 1$$

اگر $x \in \mathbb{Z}$ ، $[x] + [-x] = 0$ است و اگر $x \notin \mathbb{Z}$ ، $[x] + [-x] = -1$

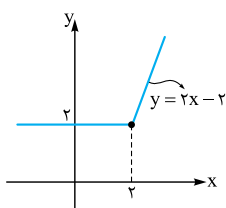




۸۲۳-۲ ضابطه تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = x + \sqrt{(x-2)^2} = x + |x-2|$$

تابع f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم و آن را رسم می‌کنیم:



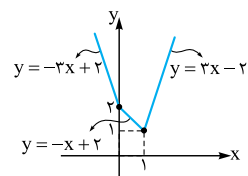
$$f(x) = \begin{cases} x+x-2 & x \geq 2 \\ x-x+2 & x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x-2 & x \geq 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$$

با توجه به شکل $R_f = [2, +\infty)$ است.

۸۲۴-۲ تابع f را به کمک بازه‌بندی به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم

و سپس آن را رسم می‌کنیم:



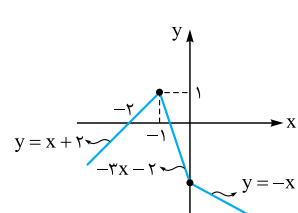
$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x+2(x-1) & x > 1 \\ x-2(x-1) & 0 \leq x \leq 1 \\ -x-2(x-1) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-2 & x > 1 \\ -x+2 & 0 \leq x \leq 1 \\ -3x+2 & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به شکل، برد تابع f بازه $[1, +\infty)$ است.

۸۲۵-۴ به کمک بازه‌بندی، نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:



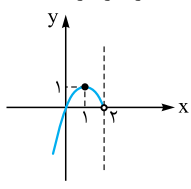
$$|x| - 2|x+1| =$$

$$\begin{cases} x-2(x+1) & x > 0 \\ -x-2(x+1) & -1 \leq x \leq 0 \\ -x+2(x+1) & x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} -x-2 & x > 0 \\ -3x-2 & -1 \leq x \leq 0 \\ x+2 & x < -1 \end{cases}$$

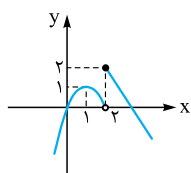
با توجه به شکل، برد این تابع بازه $(-\infty, 1]$ است.

۸۲۶-۲ ابتدا سهمی با ضابطه $g(x) = 2x - x^2$ را در بازه $x < 2$



$$\begin{cases} x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1 \\ g(2) = 4 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_S = f(1) = 1 \Rightarrow \text{رأس}$$



حال نمودار خط $y = 4 - x$ را به ازای $x \geq 2$ به نمودار فوق اضافه می‌کنیم:

پس برد این تابع بازه $(-\infty, 2]$ است.

۸۲۷-۱ باید نمودار این تابع را رسم

کنیم. در بازه $[0, 3]$ ، تابع f یک سهمی است؛ پس ابتدا رأس این سهمی را به دست می‌آوریم:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow y_S = 1 - 2 + 2 = 1 \Rightarrow S(1, 1)$$

دقت کنید که وقتی $x < 0$ است $|x| = -x$ است و باید خط $y = -x + 2$

را رسم کنیم. با توجه به شکل $R_f = [1, +\infty)$ است.

$$y = \log \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{x(x+2)} > 0 \xrightarrow{x \neq -2} \frac{x-2}{x} > 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) - \{-2\}$$

پس دامنه‌ها یکسان نیست.

$$y = \frac{1}{x} \log \left(\frac{x-2}{x} \right)^2$$

$$\left(\frac{x-2}{x} \right)^2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$$

دامنه‌ها یکسان نیست.

$$y = 2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}}$$

$$\sqrt{\frac{x-2}{x}} > 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$$

از طرفی می‌دانیم $n \log_b a = \log_b a^n$ ، پس:

$$2 \log \sqrt{\frac{x-2}{x}} = \log \left(\sqrt{\frac{x-2}{x}} \right)^2 = \log \frac{x-2}{x}$$

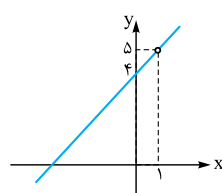
پس ضابطه‌ها نیز یکسان است.

۸۲۰-۳ تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \frac{(x+4)(x-1)}{x-1}$$

$$f(x) = x + 4$$

با فرض آن که $x \neq 1$ باشد داریم:



تابع f یک تابع خطی است که $x = 1$

عضوی از دامنه آن نیست. پس با توجه به

یک‌به‌یک بودن این تابع ۵ عضوی از برد

این تابع نیست. این مطلب را با توجه به

شکل این تابع می‌توانیم بهتر درک کنیم:

۸۲۱-۱ ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم و سپس ضابطه تابع را

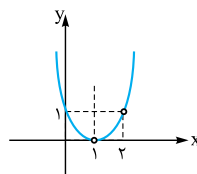
ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{(x-1)^2 (x-2)}{x^2 - 3x + 2}$$

$$D_f: x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

$$f(x) = \frac{(x-1)^2 (x-2)}{(x-1)(x-2)} \xrightarrow{x \neq 1, 2} f(x) = (x-1)^2$$



حال با فرض آن که $x \neq 1, 2$ است

نمودار این سهمی را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل $R_f = (0, +\infty)$.

تذکره: دقت داشته باشید نباید ۱ را از برد تابع حذف کنید، زیرا عدد ۱

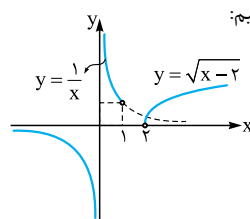
توسط $x = 0$ تولید شده است.

۸۲۲-۴ نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل تابع f ، برد تابع f شامل

همه اعداد حقیقی به جز صفر است:

$$R_f = \mathbb{R} - \{0\}$$





۸۳۱-۳ ابتدا برد سهمی $f(x) = 6x - x^2$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} x_{\text{رأس}} &= \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{-2} = 3 \\ \Rightarrow y_{\text{رأس}} &= 6 \times 3 - 3^2 = 9 \\ \Rightarrow R_f &= (-\infty, 9] \Rightarrow f(x) \leq 9 \\ \Rightarrow 0 &\leq \sqrt{6x - x^2} \leq \sqrt{9} \\ \Rightarrow 0 &\leq \sqrt{6x - x^2} \leq 3 \xrightarrow{\times (-3)} -9 \leq -3\sqrt{6x - x^2} \leq 0 \\ \xrightarrow{+2} -7 &\leq 2 - 3\sqrt{6x - x^2} \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 2 \end{cases} \\ \Rightarrow b - a &= 2 - (-7) = 9 \end{aligned}$$

۸۳۲-۲ ابتدا برد سهمی $f(x) = 4x - x^2$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} x_{\text{رأس}} &= \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \\ \Rightarrow y_{\text{رأس}} &= 4 - 4 = 0 \Rightarrow R_f = (-\infty, 4] \\ \text{دامنه تابع } g(x) &= a\sqrt{4x - x^2} \text{ به صورت} \\ 4x - x^2 \geq 0 &\Rightarrow x(4x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 4] \\ \text{مقابل است:} & \\ \text{چون } D_g = R_g &\text{ است، پس باید برد تابع } g \text{ نیز بازه } [0, 4] \text{ باشد. پس} \\ 4x - x^2 \leq 4 &\Rightarrow 0 \leq \sqrt{4x - x^2} \leq 2 \\ \xrightarrow{\frac{xa}{a>0}} 0 &\leq a\sqrt{4x - x^2} \leq 2a \Rightarrow R_f = [0, 2a] = [0, 4] \\ \Rightarrow 2a = 4 &\Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

۸۳۳-۱ ابتدا دامنه تابع f را تعیین می کنیم:

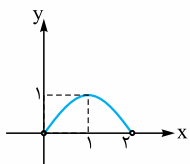
$$\begin{aligned} \frac{4-x}{x} \geq 0 &\Rightarrow x \in (0, 4] \Rightarrow D_f = (0, 4] \\ \text{چون باید } 0 &\leq x < 4 \text{ باشد پس } |x| = x \text{ است و در نتیجه} \\ x - |x| &= 0 \text{ است. پس تابع } f \text{ در بازه } (0, 4] \text{ تابع ثابت صفر است و در نتیجه برد آن فقط} \\ D_f = (0, 4] &\Rightarrow f(x) = 0 \text{ شامل عضو صفر است:} \end{aligned}$$

۸۳۴-۲ راه اول: ابتدا دامنه تابع f را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{x} \geq 0 &\Rightarrow x \in (0, 2] \\ \text{چون اعضای دامنه } f &\text{ مثبت اند پس در این بازه } |x| = x \text{ پس:} \\ f(x) &= (x + |x|) \sqrt{\frac{2-x}{x}} = 2x \sqrt{\frac{2-x}{x}} \\ \text{چون } x > 0 &\text{ است، می توانیم ضابطه } f \text{ را به صورت زیر بنویسیم:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sqrt{x^2 \times \frac{2-x}{x}} = 2\sqrt{2x - x^2} \\ \text{با فرض } g(x) &= 2x - x^2 \text{، ابتدا برد تابع } g \text{ را به دست می آوریم. } g \text{ یک} \\ \text{سهمی رو به پایین است در نتیجه:} \end{aligned}$$

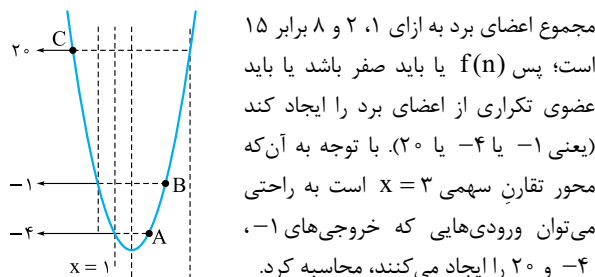
$$\begin{aligned} x_{\text{رأس}} &= \frac{-b}{2a} = 1 \Rightarrow R_g = (-\infty, 1] \Rightarrow g(x) \leq 1 \\ \xrightarrow{0 < x \leq 2} 0 &\leq \sqrt{g(x)} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{g(x)} \leq 2 \Rightarrow R_f = [0, 2] \\ \text{در بازه } (0, 2] &\text{ نمودار تابع } g \text{ به صورت زیر است:} \end{aligned}$$



$$\xrightarrow{0 < x \leq 2} 0 \leq \sqrt{g(x)} \leq 1$$

۸۲۸-۲ ابتدا خروجی های تابع f را به ازای ۱ و ۲ و ۸ حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - 6 + 4 = -1 \\ f(2) &= 4 - 12 + 4 = -4 \\ f(8) &= 64 - 48 + 4 = 20 \end{aligned}$$



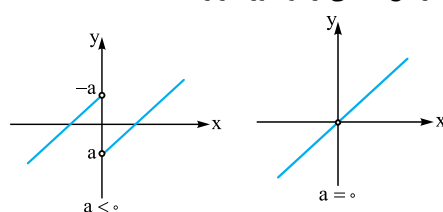
مجموع اعضای برد به ازای ۱ و ۲ و ۸ برابر ۱۵ است؛ پس $f(n)$ یا باید صفر باشد یا باید عضوی تکراری از اعضای برد را ایجاد کند (یعنی -۱ یا -۴ یا ۲۰). با توجه به آن که محور تقارن سهمی $x = 3$ است به راحتی می توان ورودی هایی که خروجی های -۱، -۴ و ۲۰ را ایجاد می کنند، محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} x_A &= 3 + 1 = 4 \quad (f(4) = f(2) = -4) \\ x_B &= 3 + 2 = 5 \quad (f(5) = f(1) = -1) \\ x_C &= 3 - 5 = -2 \quad (f(-2) = f(8) = 20) \end{aligned}$$

از طرفی ریشه های معادله $x^2 - 6x + 4 = 0$ اعداد $3 \pm \sqrt{5}$ هستند که به ازای آن ها $f(x) = 0$ است؛ پس با توجه به گزینه ها n نمی تواند -۳ باشد. ۸۲۹-۲ اگر $x \geq 0$ باشد $|x| = x$ و اگر $x < 0$ باشد $|x| = -x$ است پس تابع را به صورت دوضابطه ای می نویسیم:

$$y = \begin{cases} x + a \frac{x}{x} & x > 0 \\ x + \frac{a(-x)}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x + a & x > 0 \\ x - a & x < 0 \end{cases}$$

اگر $a > 0$ باشد نمودار تابع به صورت مقابل است: که در این حالت برد تابع $\mathbb{R}$ نیست. اگر $a \leq 0$ باشد نمودار تابع به یکی از دو صورت زیر است:



پس اگر $a < 0$ باشد برد تابع برابر $\mathbb{R}$ است. دقت کنید که اگر $a = 0$ باشد مطابق شکل بالا برد تابع $\mathbb{R} - \{0\}$ است.

۸۳۰-۲ با توجه به شکل، تابع $y = x + a|x + 2a|$ شامل دو خط است که در $x = \alpha$ تغییر شیب داده است. با توجه به آن که عبارت داخل قدرمطلق در ریشه خود تغییر علامت می دهد، پس $\alpha = -2a$ است. با توجه به شکل تابع f در بازه $x \geq -2a$ تابع ثابت است، داریم:

$$\begin{aligned} y &= x + a \left| \frac{x+2a}{+} \right| = x + a(x+2a) = x + ax + 2a^2 \\ &= (a+1)x + 2a^2 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1 \end{aligned}$$

پس اگر $a = -1$ باشد تابع در بازه $x \geq 2$ برابر تابع ثابت $y = 2$ است و در بازه $x < 2$ برابر $y = 2x$ است، پس برد آن با توجه به شکل بازه $(-\infty, 2]$ است.



$$\Rightarrow 0 \leq -\frac{9}{4}a < 1 \Rightarrow 0 \leq -9a < 4 \Rightarrow -4 < 9a \leq 0$$

اگر $9a \in \mathbb{Z}$ باشد، مقادیر قابل قبول آن $0, -1, -2, -3$ است که مجموع آن‌ها -6 است.

۱-۸۳۹ ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم:

$$\sin \pi x - 1 \geq 0 \Rightarrow \sin \pi x \geq 1$$

چون حداکثر مقدار تابع $y = \sin \pi x$ برابر ۱ است پس اعدادی عضو دامنه تابع f هستند که به ازای آن‌ها $\sin \pi x = 1$ باشد. پس این معادله را حل می‌کنیم:

$$\sin \pi x = 1 \Rightarrow \pi x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \xrightarrow{+ \pi} x = 2k + \frac{1}{2} A$$

پس هر عددی که $\frac{1}{2}$ واحد از یک عدد زوج بزرگ‌تر باشد عضو دامنه این تابع است.

$$f \text{ از طرفی می‌دانیم } [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

اعداد غیر صحیح است (اعداد زوج $+\frac{1}{2}$) پس در این حالت:

$$f(x) = \underbrace{[x] + [-x]}_{-1} + \underbrace{\sqrt{\sin \pi x - 1}}_0 \Rightarrow f(x) = -1$$

پس $f(-\frac{1}{2}f(x)) = -1$ است.

تذکره چون باید $\sin \pi x = 1$ باشد، پس تابع $y = \sqrt{\sin \pi x - 1}$ همواره برابر تابع ثابت صفر است.

$$\text{۴-۸۴۰ می‌دانیم } \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$f(x) = 2\cos^2 x - 1 + \cos^2 x = 3\cos^2 x - 1$$

از طرفی $1 \leq \cos x \leq -1$ است پس $1 \leq \cos^2 x \leq 1$ است. در نتیجه:

$$0 \leq 3\cos^2 x \leq 3 \xrightarrow{-1} -1 \leq 2\cos^2 x - 1 \leq 2$$

$$\Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 2$$

پس $[f(x)]$ برابر اعداد صحیح $-1, 0, 1, 2$ است. پس برد تابع $y = [f(x)]$ شامل ۴ عدد صحیح است.

$$\text{۲-۸۴۱ به کمک اتحاد مربع داریم:}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - 2(\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

می‌دانیم $1 \leq \sin 2x \leq -1$ است، پس $0 \leq \sin^2 2x \leq 1$ است. پس:

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 0 \xrightarrow{+1} \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 1 \Rightarrow R = [\frac{1}{2}, 1]$$

$$\text{۳-۸۴۲ به کمک مربع‌سازی، تابع } f \text{ را به صورت زیر می‌نویسیم:}$$

$$t = \sqrt{x-2} \Rightarrow x = t^2 + 2 \Rightarrow f(x) = t^2 + 2 - 2t$$

$$= t^2 - 2t + 2 = (t-1)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{t=\sqrt{x-2}} f(x) = (\sqrt{x-2}-1)^2 + 1$$

عبارت $p = (\sqrt{x-2}-1)^2 \geq 0$ است (به ازای $x \geq 2$ همه مقادیر نامنفی ایجاد می‌شود. در $x = 3$ ، حداقل مقدار p یعنی صفر ایجاد می‌شود) پس:

$$(\sqrt{x-2}-1)^2 + 1 \geq 1 \Rightarrow R_f = [1, +\infty)$$

پس در بین گزینه‌ها عدد ۲ در برد تابع f است.

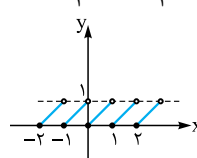
راه دوم: از گزینه‌ها می‌توانیم استفاده کنیم. صفر عضو بازه‌های **۱**، **۳** و **۴** نیست. اما $f(2) = 0$ است؛ یعنی تابع f صفر را ایجاد می‌کند و صفر عضوی از برد f است. پس تنها گزینه صحیح **۲** است.

$$\text{۲-۸۳۵ می‌دانیم } 0 \leq t - [t] < 1 \text{ است. در نتیجه اگر } t = x + \frac{1}{3}$$

باشد، داریم:

$$0 \leq (x + \frac{1}{3}) - [x + \frac{1}{3}] < 1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq x - [x + \frac{1}{3}] < \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3} \leq y < \frac{2}{3}$$



$$\text{تذکره} \text{ نمودار تابع } y = x - [x]$$

به صورت مقابل است:

$$\text{۳-۸۳۶ اگر } k \in \mathbb{Z} \text{ داریم } [x+k] = [x] + k \text{ پس:}$$

$$f(2x-3) = 2x-3 - [2x-3] = 2x-3 - [2x] + 3$$

$$= 2x - [2x] \Rightarrow g(x) = 2x - [2x] - 2x + 2[x]$$

$$= -[2x] + 2[x] = -([2x] - 2[x])$$

از طرفی $[2x - 2[x]] = [2x] - 2[x]$ زیرا $-2[x]$ عددی صحیح است می‌تواند از جزء صحیح خارج شود، پس:

$$g(x) = -[2x - 2[x]] = -[2(x - [x])]$$

$$\text{می‌دانیم } 0 \leq x - [x] < 1 \text{ است، پس } 0 \leq 2x - 2[x] < 2 \text{ است پس}$$

$$\text{جزء صحیح } \alpha \text{ یا برابر صفر است یا } 1: \quad 0 \leq 2x - 2[x] < 2 \Rightarrow [2x - 2[x]] = 0 \text{ یا } 1$$

پس برد $g(x) = -[2x - 2[x]]$ برابر مجموعه $\{0, -1\}$ است.

$$\text{۳-۸۳۷ ابتدا دامنه تابع } f \text{ را تعیین می‌کنیم، اولاً تابع زیر رادیکال باید}$$

$$\text{نامنفی باشد، پس: } 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

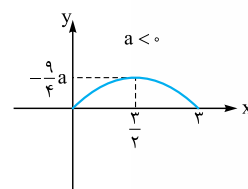
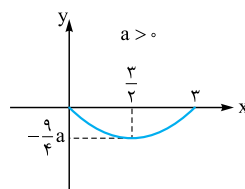
از طرفی مخرج کسر نباید صفر باشد پس محدوده‌ای که $[x^2] = 0$ را به دست می‌آوریم. می‌دانیم اگر $-1 < x < 1$ باشد $0 < x^2 < 1$ است و $[x^2] = 0$ است، پس داریم: $x \in (-1, 1)$. در نتیجه:

$$D_f = [-1, 1] - (-1, 1) = \{-1, 1\}$$

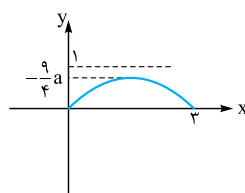
پس دامنه تابع f شامل ۲ عضو ۱ و -1 است که به ازای آن‌ها $f(x) = 0$ است. پس برد f فقط شامل عدد صفر است:

$$\text{۱-۸۳۸ ابتدا نمودار تابع } g(x) = a(x^2 - 3x) \text{ را بر حسب مثبت یا}$$

منفی بودن a رسم می‌کنیم:



اگر $a > 0$ باشد، حداقل تعداد عضوهای برد تابع $f(x) = [g(x)]$ ، $f(x) = 2$ عضو صفر و -1 است؛ پس در این حالت تک‌عضوی شدن برد تابع f امکان‌ناپذیر است.



اگر $a < 0$ باشد و مقدار $-\frac{9}{4}a$ عددی بین

صفر و ۱ باشد، برد تابع $f(x) = [g(x)]$ تنها شامل عدد صفر است:



۸۴۹-۲ اگر تابع $y = \frac{a+f(x+b)}{x}$ همانی باشد، باید $a+f(x+b)=x^2$

باشد. از طرفی به کمک مربع سازی داریم:

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 = (x+1)^2 - 6$$

در نتیجه:

$$f(x+b)+a = (x+1+b)^2 - 6 + a = x^2 \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-1 \end{cases}$$

در نتیجه باید $f(a+b) = f(5) = 3$ را محاسبه کنیم:

$$f(5) = 5^2 + 2(5) - 5 = 25 + 10 - 5 = 30$$

۸۵۰-۴

$$f(x) = \frac{|x|}{1+|x|} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{|x|}}{1+\frac{1}{|x|}} = \frac{\frac{1}{|x|}}{\frac{|x|+1}{|x|}} = \frac{1}{|x|+1}$$

$$= \frac{1}{|x|+1} \xrightarrow{x \neq 0} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{|x|+1}$$

$$\Rightarrow g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} f(x) = \frac{1}{|x|+1} + \frac{1}{x} \times \frac{|x|}{|x|+1}$$

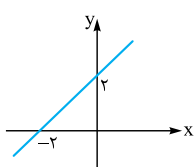
اگر $x < 0$ باشد $|x| = -x$ است و تابع g برابر تابع ثابت $y = 0$ است:

$$x < 0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x} \times \frac{-x}{1-x} = 0$$

اما اگر $x > 0$ باشد تابع g تابع ثابت نخواهد بود:

$$g(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{x} \times \frac{x}{1+x} = \frac{2}{1+x}$$

۸۵۱-۲ معادله تابع خطی f را می نویسیم:



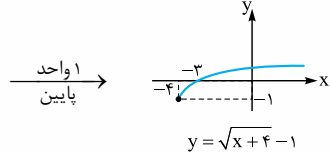
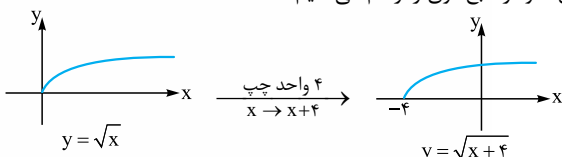
$2 =$ عرض از مبدأ و $1 =$ شیب $\Rightarrow f(x) = x + 2$

$$\Rightarrow f(x) = x + 2$$

$$y = \sqrt{2+f(x)} - 1 = \sqrt{x+4} - 1$$

پس:

حال نمودار تابع فوق را رسم می کنیم:



پس ۲ صحیح است.

۸۵۲-۳ ابتدا معادله توابع خطی f و g را می نویسیم و سپس تابع $f \times g$ را تشکیل می دهیم:

$$\begin{cases} f: \text{شیب تابع } \frac{a}{y} \Rightarrow f(x) = \frac{a}{y}x + a \\ g: \text{شیب تابع } -\frac{a}{y} \Rightarrow g(x) = -\frac{a}{y}x + a \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f \times g)(x) = a^2 + \frac{a^2}{y}x - \frac{a^2}{y}x^2$$

در نتیجه ضابطه h به صورت زیر است:

$$h(x) = 2x^2 - \frac{a^2}{y}x^2 + \frac{a^2}{y}x + a^2$$

۸۴۳-۲ درجه تابع ثابت برابر صفر است؛ پس باید ضرب x^2 و x

برابر صفر باشد:

$$\begin{cases} 2a-1=0 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \\ 4a+b=0 \xrightarrow{a=\frac{1}{2}} b=-2 \end{cases}$$

پس: $f(x) = a - b = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow f(4) = \frac{5}{2}$

۸۴۴-۴ چون g تابعی همانی است پس $g(2) = 2$ است. در نتیجه:

$$f(3) - 4g(2) = 5 \Rightarrow f(3) = 5 + 8 = 13$$

چون f تابعی ثابت است پس مقدار این تابع به ازای هر عددی برابر ۱۳ است و این تابع به صورت $f(x) = 13$ است. در نتیجه:

$$g^{-1}(2+f(4)) = g^{-1}(15) = 15$$

چون $g(15) = 15$ است، پس $g^{-1}(15)$ برابر ۱۵ خواهد بود.

۸۴۵-۳ در تابع همانی مؤلفه اول و دوم هر زوج مرتب با هم برابرند:

$$(1, a-2) : a-2=1 \Rightarrow a=3$$

$$(a+1, b) = (4, b) \Rightarrow b=4$$

$$(4, c-1) \Rightarrow c-1=4 \Rightarrow c=5$$

که در بین گزینه ها تابع $y = cx - 5x = 0$ فقط تابع ثابت است.

۸۴۶-۲ چون تابع f یک تابع خطی است پس ضابطه آن به صورت

$$y = \frac{ax+b}{2-3x} \quad \text{پس: } f(x) = ax + b$$

چون تابع فوق برابر تابع ثابت $y = 2$ است. پس به ازای همه اعداد عضو دامنه آن خروجی برابر ۲ دارد. پس تساوی زیر همواره باید برقرار باشد:

$$\frac{ax+b}{2-3x} = 2 \xrightarrow{x \neq \frac{2}{3}} ax+b = -6x+4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-6 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -6x+4 \Rightarrow f(2) = -12+4 = -8$$

۸۴۷-۱ اگر فرض کنیم تابع برابر تابع ثابت k است. به ازای هر x که

$x \neq -\frac{3}{5}$ باشد باید داشته باشیم:

$$\frac{a-2x}{5x+3} = k \Rightarrow a-2x = 5kx+3k$$

باید به ازای هر x ($x \neq -\frac{3}{5}$) تساوی فوق برقرار باشد، پس:

$$\begin{cases} 5k = -2 \Rightarrow k = -\frac{2}{5} \\ 3k = a \xrightarrow{k=-\frac{2}{5}} a = -\frac{6}{5} \end{cases}$$

پس $f(x) = -\frac{2}{5}$ است. در نتیجه: $a+f(2) = -\frac{6}{5} - \frac{2}{5} = -\frac{8}{5}$

۸۴۸-۱ چون f تابعی ثابت است ضابطه آن به صورت $f(x) = k$ است. پس:

و چون g تابعی همانی است ضابطه آن به صورت $g(x) = x$ است. پس:

$$\begin{cases} f(2) = k \\ g(1) = 1 \end{cases} \xrightarrow{f(2)=2g(1)} k=2$$

پس تابع f برابر تابع ثابت $y = 2$ است. در نتیجه:

$$x^2 - 3f(x) + g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 \times 2 + x = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

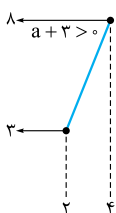


چون h خطی است، پس ضریب x^2 باید صفر باشد:

$$2 - \frac{a^2}{\lambda} = 0 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

با توجه به شکل $a > 0$ است؛ پس $a = 4$ است و ضابطه h به صورت زیر است:

$$h(x) = 4x + 16 \Rightarrow h(4) = 16 + 16 = 32$$



۸۵۳-۳ اگر فرض کنیم $f(x) = ax + b$

باشد، ضابطه تابع $g(x) = 3x + f(x)$ به صورت

$$g(x) = (3+a)x + b$$

باشد، با توجه به آن که برد تابع g ، $[3, 8]$ است،

داریم:

$$\begin{cases} g(2) = 2a + 6 + b = 3 \Rightarrow 2a + b = -3 \\ g(4) = 4a + 12 + b = 8 \Rightarrow 4a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}$$

در این حالت $h(x) = x - f(2x)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} D_h &= [1, 2] \\ h(x) &= x - 2ax - b = (1-2a)x - b = 2x + 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow R_h = [4, 6]$$

اگر $a + 3$ منفی باشد، با توجه به آن که برد تابع g ، $[3, 8]$ است، داریم:

$$\begin{cases} g(2) = 2a + 6 + b = 8 \\ g(4) = 4a + 12 + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 2 \\ 4a + b = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{2} \\ b = 13 \end{cases}$$

در این حالت $h(x) = x - f(2x)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} D_h &= [1, 2] \\ h(x) &= (1-2a)x - b = 12x - 13 \end{aligned} \Rightarrow R_h = [-1, 11]$$

که در گزینه‌ها حالت دوم وجود دارد.

۸۵۴-۱ در تابع رادیکالی $y = \sqrt{ax + b}$ اگر دامنه تابع به صورت

$$\left(-\infty, -\frac{b}{a}\right]$$
 باشد، حتماً a منفی است:

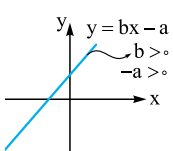
$$ax + b \geq 0 \Rightarrow ax \geq -b \xrightarrow{a < 0} x \leq -\frac{b}{a}$$

اگر $a > 0$ باشد دامنه تابع به صورت $\left[-\frac{b}{a}, +\infty\right)$ است که با توجه به شکل داده شده $a < 0$ است.

از طرفی با توجه به شکل، ریشه تابع یعنی $-\frac{b}{a}$ مثبت است پس:

$$-\frac{b}{a} > 0 \xrightarrow{a < 0} -b < 0 \Rightarrow b > 0$$

پس $a < 0$ و $b > 0$ است. پس در خط $y = bx - a$ شیب (b) مثبت و عرض از مبدأ $(-a)$ مثبت است. پس نمودار آن به صورت مقابل است:



۸۵۵-۴ چون $(3, 2), (3, a^2 - a) \in f$ هستند، باید:

$$a^2 - a = 2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases} \text{ غرق}$$

اگر $a = -1$ باشد آن‌گاه $(-1, 4), (-1, 5) \in f$ و هستند که در این صورت f تابع نیست. پس $a = 2$ است.

از طرفی چون $(3, 2), (b, 2) \in f$ و هستند پس باید $b = 3$ باشد تا f

یک‌به‌یک باشد. در نتیجه دوتایی (a, b) به صورت $(2, 3)$ است.

۸۵۶-۱ اولاً f یک تابع است، پس چون $(2, a^2 - 1)$ و $(2, a + 1)$

عضو تابعند باید $a^2 - 1 = a + 1$ باشد:

$$a^2 - 1 = a + 1 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

اگر $a = 2$ باشد تابع f یک‌به‌یک نیست، زیرا:

$$\begin{aligned} \{(2, a+1) \in f \xrightarrow{a=2} (2, 3) \in f \Rightarrow (2, 3), (1, 3) \in f \\ (1, 2) \in f \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ یک‌به‌یک نیست.

اگر $a = -1$ باشد تابع f به این صورت است: $f = \{(2, 0), (b, 0), (1, 3)\}$

برای آن که f یک‌به‌یک باشد باید $b = 2$ باشد. پس $a + b = 1$ است.

۸۵۷-۴ اولاً f یک تابع است، پس:

$$\begin{aligned} \{(1, m) \in f \\ (1, m^2 - 3m) \in f \end{aligned} \Rightarrow m^2 - 3m = m$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$$

اگر $m = 0$ باشد تابع f به این صورت است: $f = \{(1, 0), (0, 4), (0, 3)\}$

که در این صورت چون دارای زوج‌های مرتب $(0, 4)$ و $(0, 3)$ است

یک‌به‌یک نیست. اگر $m = 4$ باشد تابع f به صورت زیر است:

$$f = \{(1, 4), (4, 4), (0, 3)\}$$

که در این صورت نیز چون دارای زوج مرتب‌های $(1, 4)$ و $(4, 4)$ است

یک‌به‌یک نیست. پس هیچ مقداری برای m یافت نمی‌شود که تابع f را به

تابعی یک‌به‌یک تبدیل کند.

۸۵۸-۲ می‌دانیم هر چندجمله‌ای درجه دوم یک سهمی است و سهمی‌ها

یک‌به‌یک نیستند؛ پس f نباید یک سهمی باشد؛ پس لازم است ضریب x^2 در

آن صفر باشد. در نتیجه $a = 0$ است. در این صورت $f(x) = 3x - 1$ است

که f تابعی خطی و یک‌به‌یک است. پس $f(1) = 2$ می‌شود.

تذکره: توابع خطی که شیب آن‌ها غیر صفر باشد یک‌به‌یک‌اند.

۸۵۹-۴ اگر x_S طول رأس یک سهمی باشد، سهمی

در هر بازه زیرمجموعه $[x_S, +\infty)$ یا $(-\infty, x_S]$

یک‌به‌یک است:

چون تابع $y = x^2 + ax + 1$ در بازه $(-\infty, 2]$ یک‌به‌یک

است پس $x = 2$ همان طول رأس سهمی است:

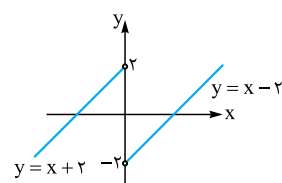
$$x_S = -\frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = -4$$

پس حداکثر مقدار a برابر -4 است.

۸۶۰-۳ هر گزینه را به صورت

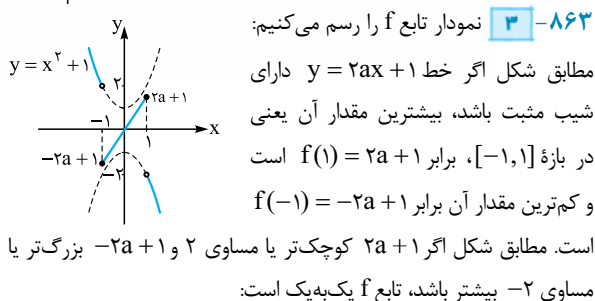
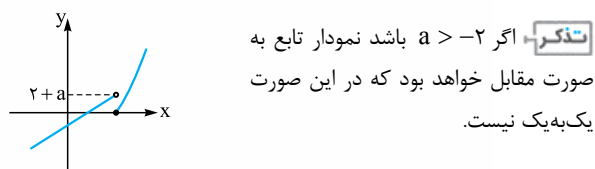
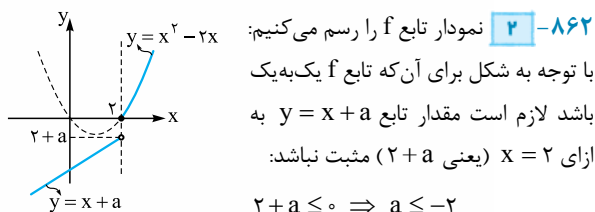
یک تابع دوطبقه‌ای می‌نویسیم و آن

را رسم می‌کنیم:



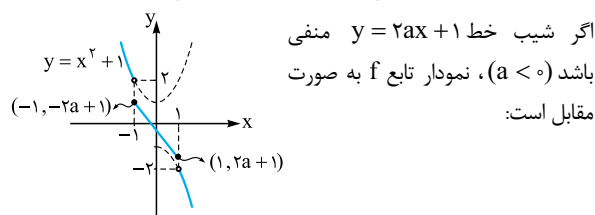
$$y = x - 2|x| = \begin{cases} x - \frac{2x}{x} & x > 0 \\ x + \frac{2x}{x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x - 2 & x > 0 \\ x + 2 & x < 0 \end{cases}$$





$$a > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a + 1 \leq 2 \Rightarrow 2a \leq 1 \Rightarrow a \leq \frac{1}{2} \\ -2a + 1 \geq -2 \Rightarrow 2a \leq 3 \Rightarrow a \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{اشتراک} \rightarrow a \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{a > 0} 0 < a \leq \frac{1}{2}$$



در این حالت اگر تابع f یک‌به‌یک باشد باید:

$$a < 0 \Rightarrow \begin{cases} -2a + 1 \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2a \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq a \\ -2 \leq 2a + 1 \Rightarrow -3 \leq 2a \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq a \end{cases}$$

$$\text{اشتراک} \rightarrow -\frac{1}{2} \leq a \xrightarrow{a < 0} -\frac{1}{2} \leq a < 0$$

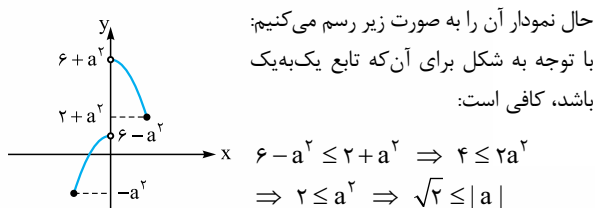
$$\begin{cases} a > 0: 0 < a \leq \frac{1}{2} \\ a < 0: -\frac{1}{2} \leq a < 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] - \{0\}$$

پس:

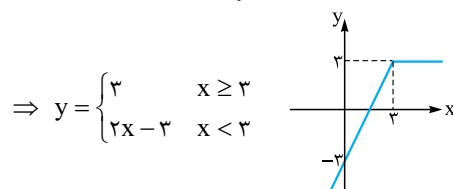
اگر $a = 0$ باشد، تابع f در بازه $[-1, 1]$ تابع ثابت $y = 1$ است و یک‌به‌یک نیست.

۸۶۴-۲ تابع را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

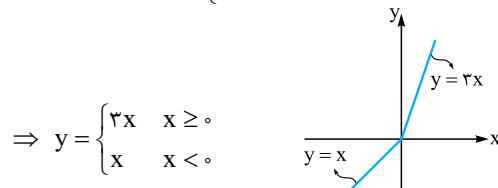
$$y = \frac{a^2 x}{|x|} + f(x) = \begin{cases} f(x) + a^2 & x > 0 \\ f(x) - a^2 & x < 0 \end{cases}$$



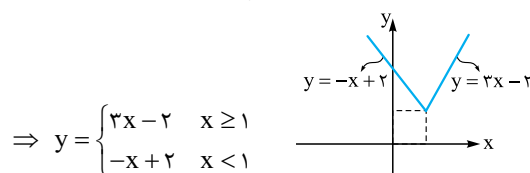
$$\text{۲} \quad y = x - |x - 3| = \begin{cases} x - (x - 3) & x \geq 3 \\ x + (x - 3) & x < 3 \end{cases}$$



$$\text{۳} \quad y = 2x + |x| = \begin{cases} 2x + x & x \geq 0 \\ 2x - x & x < 0 \end{cases}$$

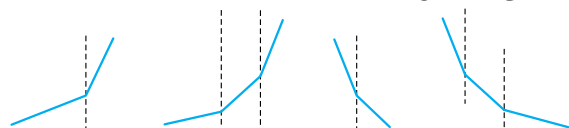


$$\text{۴} \quad y = x + 2|x - 1| = \begin{cases} x + 2(x - 1) & x \geq 1 \\ x - 2(x - 1) & x < 1 \end{cases}$$

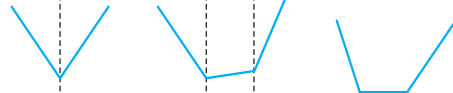


پس با توجه به شکل‌ها تابع **۳** یک‌به‌یک است.

۸۶۱-۱ توابع هر ۴ گزینه توابعی پیوسته هستند که ضابطه آن‌ها در هر بازه یک خط است. اگر شیب خطوط در همه بازه‌ها مثبت یا در همه بازه‌ها منفی باشد، تابع قطعاً یک‌به‌یک است. مانند شکل‌های زیر:



اما اگر در یکی از بازه‌ها شیب خط مثبت (یا صفر) و در یکی از بازه‌های دیگر شیب خط منفی (یا صفر) باشد تابع دیگر یک‌به‌یک نیست. مانند شکل‌های زیر:



با توجه به این نکته به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

در **۱** وقتی $x > -2$ است شیب خط 5 و وقتی $x < -2$ است شیب خط 3 است. پس شیب خط تغییر علامت نمی‌دهد و قطعاً این تابع یک‌به‌یک است.

در **۲** وقتی $x > 0$ است شیب خط 5 و وقتی $x < -2$ است شیب خط -5 است پس در این تابع چون شیب خط‌ها تغییر علامت می‌دهند یک‌به‌یک نیست.

در **۳** وقتی $x < -2$ است $y = -2$ می‌باشد که تابعی ثابت است و در نتیجه y یک‌به‌یک نیست.

در **۴** وقتی $x > 0$ است شیب خط 2 و وقتی $x < -2$ است شیب خط -2 است. پس این تابع نیز غیریک‌به‌یک است.



۱-۸۶۵ هر تابع به صورت $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ که در آن $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ باشد

یک تابع یک‌به‌یک است. (به این توابع هموگرافیک گویند) اگر $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ باشد،

f یک تابع ثابت است که ضابطه آن به صورت $f(x) = \frac{a}{c}$ ($x \neq -\frac{d}{c}$) است؛ پس باید داشته باشیم:

$$y = \frac{mx - m + 1}{x + 1} \Rightarrow \frac{m}{1} \neq \frac{-m+1}{2} \Rightarrow 2m \neq -m+1$$

$$\Rightarrow 3m \neq 1 \Rightarrow m \neq \frac{1}{3}$$

۳-۸۶۶ می‌دانیم تابعی معکوس‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد. اولاً f

تابع است، در نتیجه:

$$\begin{cases} (1, 2) \in f \\ (1, a) \in f \end{cases} \xrightarrow{f \text{ تابع است}} a = 2$$

در نتیجه تابع f به صورت مقابل است: $f = \{(1, 2), (3, 4), (b, 4)\}$

برای آن که f یک‌به‌یک باشد لازم است $(3, 4) = (b, 4)$ باشد، پس $b = 3$ است. پس $(3, 4) \in f$ است و $(4, 3) \in f^{-1}$. در نتیجه $f^{-1}(4) = 3$ است.

۴-۸۶۷ تابع $f(x) = x^3 + ax^2$ ($a \neq 0$) یک تابع غیر یک‌به‌یک است. زیرا دارای ۲ ریشه صفر و $-a$ است:

$$x^3 + ax^2 = 0 \Rightarrow x^2(x+a) = 0 \Rightarrow x = 0, x = -a$$

در نتیجه اگر تابع f بخواهد یک‌به‌یک شود لازم است $a = 0$ باشد. در این صورت $f(x) = x^3$ تابعی یک‌به‌یک است.

پس تابع $y = x^3 + ax^2 + a - 3$ نیز اگر $a \neq 0$ باشد به ازای $x = 0$ و $x = -a$ خروجی یکسان را دارد. در نتیجه لازم است $a = 0$ باشد. در این حالت ضابطه تابع به صورت $g(x) = x^3 - 3$ درمی‌آید و ضابطه معکوس آن به صورت زیر است:

$$y = x^3 - 3 \Rightarrow x^3 = y + 3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+3}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+3}$$

که با توجه به گزینه‌ها این تابع از نقطه $(5, 2)$ عبور می‌کند.

۲-۸۶۸ همواره تابعی معکوس‌پذیر است، اگر (α, β) و (γ, β) عضو این تابع باشند، آن‌گاه $\alpha = \gamma$ باشد. در حالت کلی ترکیب دو تابع یک‌به‌یک تابعی یک‌به‌یک است.

$$g(x) = f(2x-1) \Rightarrow \begin{cases} g(\alpha) = f(2\alpha-1) = \beta \\ g(\gamma) = f(2\gamma-1) = \beta \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{چون } f \text{ یک‌به‌یک است}} 2\alpha-1 = 2\gamma-1 \Rightarrow \alpha = \gamma$$

به عنوان مثال اگر $f(x) = 2x$ باشد، $g(x) = f(2x-1) = 4x-2$ است که تابعی یک‌به‌یک است.

۲ قطعاً این تابع یک‌به‌یک نیست. زیرا به ازای هر دو ورودی که قرینه هم باشند خروجی یکسان دارد:

$$g(x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow \begin{cases} g(\alpha) = f(\alpha) + f(-\alpha) \\ g(-\alpha) = f(-\alpha) + f(\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(\alpha) = g(-\alpha) \Rightarrow g \text{ یک‌به‌یک نیست.}$$

۳ ممکن است تابعی یک‌به‌یک باشد. مثلاً اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد که همگی اعضای برد آن مثبت یا همگی منفی باشند، تابع $|f|$ تابعی یک‌به‌یک است، مانند توابع $y = 2^x$ و $y = -3^x$.

۴ نیز ممکن است تابعی یک‌به‌یک باشد. مثلاً اگر $f(x) = 2x$ باشد، $f(-x) = -2x$ است و داریم $y = f(x) - f(-x) = 4x$ که این تابع یک‌به‌یک است.

۳-۸۶۹ اگر $f^{-1}(4) = \alpha$ باشد آن‌گاه $f(\alpha) = 4$ است. پس:

$$f(\alpha) = -\alpha + \sqrt{-2\alpha} = 4 \Rightarrow \sqrt{-2\alpha} = \alpha + 4 \quad (*)$$

$$\xrightarrow{-4 \leq \alpha \leq 0} \alpha^2 + 8\alpha + 16 = -2\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 10\alpha + 16 = 0 \Rightarrow (\alpha+2)(\alpha+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \alpha = -8 \end{cases} \text{ غرق}$$

$\alpha = -8$ به این دلیل غیرقابل قبول است که در معادله اصلی صدق نمی‌کند. پس $\alpha = -2$ است. از طرفی α همان $f^{-1}(4)$ است. پس $f^{-1}(4) = -2$ است.

تذکره البته برای حل معادله $(*)$ می‌توانستیم از گزینه‌ها نیز کمک بگیریم. واضح است که $\alpha = -2$ جواب این معادله است.

۴-۸۷۰ اگر $g^{-1}(16) = \alpha$ باشد پس $g(\alpha) = 16$ است. چون $g(x) = f(3x-4)$ است، پس:

$$g(\alpha) = f(3\alpha-4) \xrightarrow{g(\alpha)=16} f(3\alpha-4) = 16$$

پس $f^{-1}(16) = 3\alpha-4$ است. چون $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ است، پس:

$$f^{-1}(16) = 16 + \sqrt{16} = 20 \Rightarrow f^{-1}(16) = 3\alpha-4 = 20$$

$$\Rightarrow 3\alpha = 24 \Rightarrow \alpha = 8 \xrightarrow{g^{-1}(16)=\alpha} g^{-1}(16) = 8$$

۱-۸۷۱ با توجه به آن‌که $f^{-1}(3) = 4$ است، داریم $f(4) = 3$. اگر در تساوی زیر به جای x قرار دهیم -1 ، $f(4)$ ایجاد می‌شود و داریم:

$$1 + f(1-3x) = g(2x+3) \xrightarrow{x=-1} 1 + f(4) = g(1)$$

$$\xrightarrow{f(4)=3} g(1) = 4 \Rightarrow g^{-1}(4) = 1$$

۳-۸۷۲ چون $g^{-1}(2) = 2$ است پس $g(2) = 2$ است. اگر در تساوی زیر به جای x قرار دهیم $1/5$ ، $g(2)$ ایجاد می‌شود، در نتیجه:

$$f(2x) = 1 - 3g\left(\frac{2}{x}\right) \xrightarrow{x=1/5} f(2) = 1 - 3g(2)$$

$$\xrightarrow{g(2)=2} f(2) = 1 - 3 \times 2 = -5 \Rightarrow f(2) = -5 \Rightarrow f^{-1}(-5) = 2$$

۲-۸۷۳ اگر فرض کنیم $f^{-1}(3) = \alpha$ است پس $f(\alpha) = 3$ است. در نتیجه اگر در تساوی زیر به جای x قرار دهیم α ، داریم:

$$f(x) = g\left(1 - \frac{3}{x}\right) \xrightarrow{x=\alpha} f(\alpha) = g\left(1 - \frac{3}{\alpha}\right)$$

$$\xrightarrow{f(\alpha)=3} g\left(1 - \frac{3}{\alpha}\right) = 3 \Rightarrow g^{-1}(3) = 1 - \frac{3}{\alpha}$$

از طرفی با توجه به تساوی $g^{-1}(x) = 2 + \frac{3}{x}$ ، داریم:

$$g^{-1}(3) = 2 + \frac{3}{3} = 3 \Rightarrow 1 - \frac{3}{\alpha} = 3 \Rightarrow -\frac{3}{\alpha} = 2 \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$$

پس:

۳-۸۷۴ اگر فرض کنیم $f^{-1}(10) = \alpha$ ، داریم $f(\alpha) = 10$ ؛ پس:

$$f(\alpha) = g^3(\alpha) + g(\alpha) = 10 \Rightarrow g^3(\alpha) + g(\alpha) - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (g(\alpha) - 2)(g^2(\alpha) + 2g(\alpha) + 5) = 0 \Rightarrow g(\alpha) = 2$$

$$\downarrow \Delta < 0$$

پس $g(\alpha) = 2$ است، در نتیجه $g^{-1}(2) = \alpha$ است. بنابراین:

$$g^{-1}(x) = \sqrt{x+7} \Rightarrow g^{-1}(2) = \sqrt{2+7} = 3 \Rightarrow g^{-1}(2) = \alpha = 3$$

پس $f^{-1}(10) = \alpha = 3$ است.

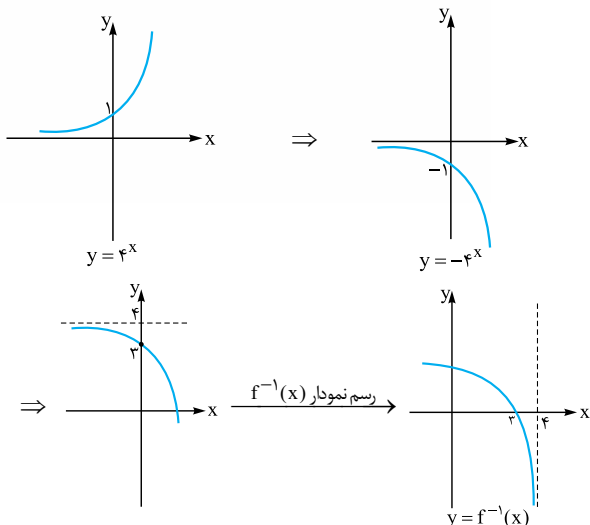


از طرفی اعدادی عضو دامنه تابع g هستند که در آن‌ها $2x + 1 - f^{-1}(x) \geq 0$ باشد، در نتیجه باید $f^{-1}(x) \leq 2x + 1$ باشد. پس بازه $[0, 2]$ دامنه تابع g است.

۸۷۹-۳ ضابطه تابع f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = 4 - 2^x = 4 - (2^x)^x = 4 - 4^x$$

با توجه به نمودار تابع f می‌توان $f^{-1}(x)$ را تعیین علامت کرد:



پس تابع f^{-1} دارای ریشه ۳ است که در بازه $(3, 4)$ دارای مقادیر منفی و در بازه $(-\infty, 3)$ دارای مقادیر مثبت است. حال به کمک جدول تعیین علامت زیر علامت $xf^{-1}(x)$ را مشخص می‌کنیم:

	۰	۳	۴	
$f^{-1}(x)$	+	+	-	تن
x	-	+	+	+
$xf^{-1}(x)$	-	+	-	تن

$$xf^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 3]$$

۸۸۰-۱ x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2-y$$

$$\frac{y \leq 2}{x \geq 1} \rightarrow x-1 = (2-y)^2 \Rightarrow x = (2-y)^2 + 1, y \leq 2$$

$$f^{-1}(x) = (2-x)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5, x \in (-\infty, 2] \quad \text{پس:}$$

توجه کنید که وقتی $\sqrt{x-1} \geq 0$ است، $-\sqrt{x-1} \leq 0$ است و $2 - \sqrt{x-1} \leq 2$ است؛ پس $R_f = D_{f^{-1}}$ است که $R_f = (-\infty, 2]$ است.

۸۸۱-۳ x را برحسب y مطابق مراحل زیر به دست می‌آوریم:

$$y = 3 - \sqrt{2-x} \Rightarrow \sqrt{2-x} = 3-y$$

چون سمت چپ تساوی فوق نامنفی است (خروجی رادیکال با فرجه زوج نامنفی است!) پس لازم است $y \leq 3$ باشد تا سمت راست تساوی نیز نامنفی باشد. با این شرط دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$y \leq 3: 2-x = (3-y)^2 \Rightarrow x = 2 - (3-y)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = 2 - (3-x)^2 = -x^2 + 6x - 7 \\ x \leq 3 \end{cases}$$

۸۷۵-۲ اگر فرض کنیم $g^{-1}(6) = \alpha$ ، پس $g(\alpha) = 6$ است. در نتیجه:

$$g(\alpha) = f(\alpha) + \sqrt{f(\alpha)} = 6$$

اگر فرض کنیم $\sqrt{f(\alpha)} = t$ است، $f(\alpha) = t^2$ است و در نتیجه:

$$t^2 + t = 6 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 2 \end{cases}$$

چون $\sqrt{f(\alpha)} = t$ است، باید $t \geq 0$ باشد. پس $t = -3$ قابل قبول نیست، در نتیجه:

$$\sqrt{f(\alpha)} = 2 \Rightarrow f(\alpha) = 4$$

از طرفی اگر $f(\alpha) = 4$ باشد، $f^{-1}(4) = \alpha$ است. با توجه به ضابطه داریم:

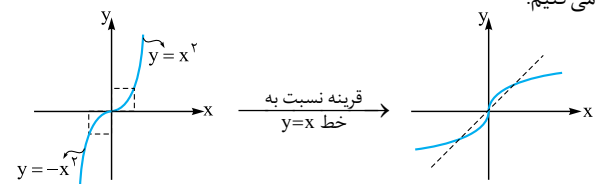
$$f^{-1}(4) = \sqrt[3]{2 \times 4} = 2 \xrightarrow{f^{-1}(4) = \alpha} \alpha = 2$$

چون $g^{-1}(6) = \alpha$ است پس $g^{-1}(6) = 2$ می‌باشد.

۸۷۶-۳ تابع f را به صورت ۲ ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = x|x| = \begin{cases} x \times x & x \geq 0 \\ x \times (-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

برای رسم تابع f^{-1} از روی نمودار تابع f کافی است نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ربع‌های اول و سوم قرینه کنیم. پس توابع f و f^{-1} را رسم می‌کنیم.



پس نمودار تابع f^{-1} است.

۸۷۷-۴ برای رسم تابع f^{-1} از روی تابع f باید قرینه تابع f را نسبت به خط $y = x$ رسم کنیم؛ پس ابتدا نمودار f^{-1} را رسم می‌کنیم.

برای تعیین دامنه تابع y باید نامعادله زیر را حل کنیم:

$$x - f^{-1}(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq f^{-1}(x)$$

با توجه به شکل، بازه‌ای که عرض نقاط تابع $y = x$ بزرگتر یا مساوی عرض نقاط تابع $y = f^{-1}(x)$ است جواب نامعادله است که با توجه به شکل بازه $[3, 8]$ این ویژگی را دارد.

۸۷۸-۲ برای رسم تابع f^{-1} ، کافی است نمودار تابع f را نسبت به نیمساز ناحیه‌های اول و سوم تقارن دهیم. ضمن این‌که می‌دانیم دامنه تابع f ، برد تابع f^{-1} و برد تابع f دامنه تابع f^{-1} است.

پس ابتدا معکوس تابع f و خط $h(x) = \frac{x-1}{2}$ را رسم می‌کنیم:

با توجه به شکل، تابع h در بازه $[1, 5]$ پایین‌تر یا مساوی تابع f است. در این بازه برد هر دو تابع بازه $[0, 2]$ است. پس در بازه $[0, 2]$ تابع h^{-1} بالاتر از f^{-1} است (این مطلب را در شکل می‌بینید). در نتیجه:

$$x \in [0, 2] \Leftrightarrow 2x + 1 \geq f^{-1}(x)$$



تذکره می‌توانستیم برای پیدا کردن برد تابع f که همان دامنه تابع f^{-1} است از شکل تابع f و یا نامساوی‌های زیر استفاده کنیم:

$$\sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{2-x} \leq 0 \xrightarrow{+2} 3 - \sqrt{2-x} \leq 3$$

$$\Rightarrow f(x) \leq 3 \Rightarrow R_f = (-\infty, 3] = D_{f^{-1}}$$

۸۸۲-۳ تابع f را به صورت ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$|3-x| = \begin{cases} -(3-x) & x > 3 \\ 3-x & x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x + (3-x) & x > 3 \\ x - (3-x) & x \leq 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 3 & x > 3 \\ 2x-3 & x \leq 3 \end{cases}$$

پس تابع f در بازه $x \leq 3$ ، یک‌به‌یک است. برد تابع f در این بازه به صورت مقابل است: $x \leq 3 \Rightarrow 2x \leq 6 \Rightarrow \frac{2x-3}{f(x)} \leq 3 \Rightarrow f(x) \leq 3$

$$\Rightarrow D_{f^{-1}} = (-\infty, 3]$$

ضابطه f^{-1} در بازه معکوس‌پذیر آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$y = 2x - 3 \Rightarrow 2x = y + 3 \Rightarrow x = \frac{y+3}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} \Rightarrow \begin{cases} (-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} \end{cases}$$

۸۸۳-۴ تابع f را به صورت ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = 2x - |4 - 2x| = \begin{cases} 2x - (2x - 4) & x > 2 \\ 2x - (4 - 2x) & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & x > 2 \\ 4x - 4 & x \leq 2 \end{cases}$$

تابع f در بازه $(2, +\infty)$ تابع ثابت $y = 4$ است که یک‌به‌یک نیست. پس این تابع در بازه $(-\infty, 2]$ یک‌به‌یک است. پس وارون این تابع را در این

بازه به دست می‌آوریم: $y = 4x - 4 \Rightarrow x = \frac{y+4}{4}$

$$4x \leq 8 \Rightarrow 4x - 4 \leq 4 \Rightarrow y \leq 4$$

$$\begin{cases} x = \frac{y+4}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+4}{4} = \frac{1}{4}x + 1 \\ y \leq 4 \end{cases}$$

۸۸۴-۴ معکوس تابع f را به ازای $x \geq 1$ به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 2x - 3 = y \Rightarrow x^2 - 2x = y + 3$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 - 1 = y + 3 \Rightarrow (x-1)^2 = y + 4$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm\sqrt{y+4} \xrightarrow{x \geq 1} x-1 = \sqrt{y+4}$$

$$\Rightarrow x = 1 + \sqrt{y+4} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+4}$$

حال تابع f^{-1} و g را تقاطع می‌دهیم:

$$1 + \sqrt{x+4} = \frac{x-9}{2} \Rightarrow 2 + 2\sqrt{x+4} = x-9$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+4} = x-11$$

همین حالا با توجه به گزینه‌ها جواب به دست می‌آید. با توجه به گزینه‌ها $x = 21$ جواب معادله است.

۸۸۵-۲ راه اول: ابتدا تابع f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = 3x + 1 \Rightarrow 3x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3} \Rightarrow f^{-1}(3x-1) = \frac{3x-1-1}{3} = \frac{3x-2}{3}$$

$$y = \sqrt{f^{-1}(3x-1)} - 2x = \sqrt{\frac{3x-2}{3}} - 2x$$

در نتیجه:

$$\frac{3x-2}{3} - 2x \geq 0 \xrightarrow{\times 3} 3x-2-6x \geq 0$$

$$\Rightarrow 3x \leq -2 \Rightarrow x \leq -\frac{2}{3}$$

راه دوم: اگر تابع f تابعی اکیداً صعودی باشد، تابع f^{-1} نیز اکیداً صعودی است. پس برای محاسبه دامنه این تابع می‌توانیم از این خاصیت استفاده کنیم:

$$f^{-1}(3x-1) - 2x \geq 0 \Rightarrow f^{-1}(3x-1) \geq 2x \Rightarrow 3x-1 \geq f(2x)$$

$$3x-1 \geq 2(2x)+1 \Rightarrow 3x-1 \geq 4x+1 \Rightarrow 3x \leq -2 \Rightarrow x \leq -\frac{2}{3}$$

۸۸۶-۱ تابع مخرج دارای ریشه مضاعف ۲ است؛ پس:

$$ax^2 + bx + 8 = a(x-2)^2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + 8 = ax^2 - 4ax + 4a \Rightarrow a = 2$$

پس تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{x-2}{2(x-2)^2} = \frac{1}{2(x-2)}$$

حال $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{2(x-2)} = y \Rightarrow x-2 = \frac{1}{2y} \Rightarrow x = \frac{1}{2y} + 2 = \frac{4y+1}{2y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{2x} \Rightarrow f^{-1}(2x) = \frac{8x+1}{4x}$$

در نتیجه:

$$g(x) = \sqrt{\frac{8x+1}{4x}} - 6 = \sqrt{\frac{-16x+1}{4x}} \Rightarrow \frac{-16x+1}{4x} \geq 0 \Rightarrow 0 < x \leq \frac{1}{16}$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ n = \frac{1}{16} \end{cases} \Rightarrow m+n = \frac{1}{16}$$

۸۸۷-۱ چون f یک تابع خطی با شیب مثبت است، ضابطه آن به صورت $f(x) = ax + b$ ($a > 0$) است. در نتیجه ضابطه تابع معکوس f به صورت

زیر است:

$$y = ax + b \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow x = \frac{y-b}{a}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$$

$$f^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{\frac{x-b}{a} - b}{a} = \frac{x-b-ab}{a^2}$$

$$= \frac{x-b-ab}{a^2} \Rightarrow f^{-1} \circ f^{-1}(x) = \frac{1}{a^2}x - \left(\frac{b+ab}{a^2}\right)$$

با توجه به آن که $f^{-1} \circ f^{-1}(x) = 4x + 3$ است، پس:

$$\frac{1}{a^2}x - \left(\frac{b+ab}{a^2}\right) = 4x + 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = 4 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \xrightarrow{a > 0} a = \frac{1}{2} \\ -\left(\frac{b+ab}{a^2}\right) = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{b + \frac{1}{2}b}{\frac{1}{4}} = -3 \Rightarrow 4b + 2b = -3 \Rightarrow 6b = -3$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = ax + b = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = \frac{x-1}{2}$$



$$\Rightarrow \Delta b = 20 \Rightarrow b = 4 \xrightarrow{a\sqrt{b} = -8} a\sqrt{4} = -8 \Rightarrow a = -4 \Rightarrow a + b = 0$$

۸۹۱-۴ راه اول: اگر $x \geq 2$ و $\sqrt{x-1} = t$ باشد، داریم:

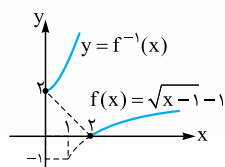
$$t = \sqrt{x-1} \xrightarrow{x \geq 2} t^2 = x-1 \Rightarrow x = t^2 + 1$$

$$\Rightarrow x - 2\sqrt{x-1} = t^2 + 1 - 2t = (t-1)^2$$

$$f(x) = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}-1|$$

پس: اگر $x \geq 2$ باشد، $\sqrt{x-1} \geq 1$ است و در نتیجه $|\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}-1$ است. پس:

$$f(x) = |\sqrt{x-1}-1| = \sqrt{x-1}-1, x \geq 2$$



حال نمودار تابع f را رسم می‌کنیم و

قرینه آن نسبت به خط $y = x$ را به

دست می‌آوریم تا تابع f^{-1} ایجاد شود:

پس **۴** صحیح است.

راه دوم: چون $f(2) = 0$ است پس $f^{-1}(0) = 2$ است. تنها گزینه‌ای که

این ویژگی را دارد **۴** است.

۸۹۲-۳ اگر $x \geq 0$ باشد: $y = \sqrt{x} \xrightarrow{x \geq 0} x = y^2$

اگر $x < 0$ باشد: $y = -\sqrt{-x} \xrightarrow{x < 0} y^2 = -x \Rightarrow x = -y^2$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x \times x & x \geq 0 \\ -x \times x & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به تعریف $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ ، داریم: $f^{-1}(x) = x|x|$

۸۹۳-۴ تابع f را با توجه به تعریف $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} \sqrt{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{x}{x} \sqrt{-x} & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

چون f در $x = 0$ پیوسته است می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$$

حال معکوس تابع f را به دست می‌آوریم:

$$x \geq 0: y = \sqrt{x} \xrightarrow{y \geq 0} x = y^2$$

$$x < 0: y = -\sqrt{-x} \xrightarrow{y < 0} x = -y^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} x \times x & x \geq 0 \\ -x \times x & x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x|x|, x \in \mathbb{R}$$

۸۹۴-۱ تابع f را به صورت یک تابع سه ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \sqrt{1-x^2} = \begin{cases} \frac{x}{x} \sqrt{1-x^2} & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{x}{x} \sqrt{1-x^2} & -1 < x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & -1 < x < 0 \end{cases}$$

۸۸۸-۱ قرینه هر تابع نسبت به خط $y = x$ ، تابع معکوس آن است؛

پس کافی است x را بر حسب y حساب کنیم:

$$3y - 2x = 4 \Rightarrow 2x = 3y - 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}y - 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3}{2}x - 2$$

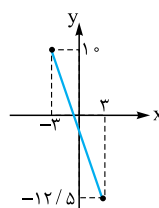
۸۸۹-۲ ابتدا ضابطه تابع f را می‌نویسیم. چون $f^{-1}(1) = 0$ است،

پس $f(0) = 1$ است و در نتیجه تابع f از نقطه $(0, 1)$ عبور می‌کند. از طرفی

چون $f(1) = 5$ است، تابع f از نقطه $(1, 5)$ عبور می‌کند؛ پس:

$$\begin{cases} (0, 1) \in f \\ (1, 5) \in f \end{cases} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{5-1}{1-0} = 4$$

$$\xrightarrow{(0, 1) \in f} f(x) = 4x + 1$$



چون دامنه تابع f بازه $[-3, 3]$ است، پس برد

آن مطابق شکل بازه $[-11, 13]$ است. از آنجا

که دامنه تابع f^{-1} همان برد تابع f است پس

به دست می‌آوریم: $D_{f^{-1}} = [-11, 13]$

$$y = 4x + 1 \Rightarrow 4x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{4} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4}$$

$$\begin{cases} f: [-3, 3] \Rightarrow [-11, 13] \\ f(x) = 4x + 1 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} f^{-1}: [-11, 13] \Rightarrow [-3, 3] \\ f^{-1}(x) = \frac{x-1}{4} \end{cases}$$

$$g(x) = f^{-1}(x) - f(x) = \left(\frac{x-1}{4}\right) - (4x+1) = -\frac{15}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$D_g = D_f \cap D_{f^{-1}} = [-3, 3] \cap [-11, 13] = [-3, 3]$$

چون شیب و عرض از مبدأ خط g منفی است، پس **۲** صحیح است.

۸۹۰-۴ راه اول: به کمک مربع‌سازی و تغییر متغیر $\sqrt{x} = t$ ، داریم:

$$f(x) = x + 4\sqrt{x} = t^2 + 4t = (t+2)^2 - 4$$

$$\Rightarrow y = (\sqrt{x} + 2)^2 - 4 \Rightarrow (\sqrt{x} + 2)^2 = y + 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + 2 = \pm \sqrt{y+4}$$

غرف

چون سمت چپ تساوی بالا مثبت است پس سمت راست آن نیز باید

مثبت باشد، پس:

$$\sqrt{x} + 2 = \sqrt{y+4} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{y+4} - 2$$

$$\Rightarrow x = (\sqrt{y+4} - 2)^2 \Rightarrow x = y + 4 - 4\sqrt{y+4} + 4$$

$$\Rightarrow x = y + 8 - 4\sqrt{y+4}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x + 8 - 4\sqrt{x+4} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$$

راه دوم: با توجه به ضابطه $f(x) = x + 4\sqrt{x}$ داریم $f(1) = 5$ و $f(0) = 0$

پس $f^{-1}(0) = 0$ و $f^{-1}(5) = 1$ است. در نتیجه:

$$f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(0) = 8 + a\sqrt{b} = 0 \Rightarrow a\sqrt{b} = -8$$

$$f^{-1}(5) = 1 \Rightarrow f^{-1}(5) = 12 + a\sqrt{5+b} = 1$$

$$\Rightarrow a\sqrt{b+5} = -12 \Rightarrow \frac{a\sqrt{b}}{a\sqrt{b+5}} = \frac{8}{12}$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b+5}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{b}{b+5} = \frac{4}{9} \Rightarrow 9b = 4b + 20$$



حال ضابطه تابع f^{-1} را به دست می آوریم:

$$0 < x < 1: y = \sqrt{1-x^2} \xrightarrow{0 < y < 1} y^2 = 1-x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 1-y^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1-y^2} \xrightarrow{0 < x < 1} x = \sqrt{1-y^2}$$

$$-1 < x < 0: y = -\sqrt{1-x^2} \xrightarrow{-1 < y < 0} y^2 = 1-x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 1-y^2 \Rightarrow x = \pm \sqrt{1-y^2} \xrightarrow{-1 < x < 0} x = -\sqrt{1-y^2}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 0 \\ -\sqrt{1-x^2} & -1 < x < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x) \text{ پس:}$$

تذکره به کمک عددگذاری و بررسی گزینه ها نیز می توانستیم گزینه موردنظر را پیدا کنیم.

۸۹۵-۴ اگر $y = \frac{1}{4}(x + \sqrt{x^2 + 4})$ باشد، x را بر حسب y به دست

می آوریم:

$$2y = x + \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow 2y - x = \sqrt{x^2 + 4}$$

$$\xrightarrow{2y \geq x} (2y - x)^2 = x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 4y^2 + x^2 - 4xy = x^2 + 4 \Rightarrow 4xy = 4y^2 - 4$$

$$\Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{y} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{x}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x = -f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(x) + f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - x = 0 \text{ پس:}$$

۸۹۶-۴ ابتدا ضابطه تابع معکوس f را به دست می آوریم:

$$y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

با توجه به ضابطه بالا x و y هم علامت اند (یا هر دو مثبت یا هر دو منفی یا هر دو صفرند) پس با این شرط x را بر حسب y به دست می آوریم:

$$y^2 = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{1+x^2}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{y^2} - 1 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1-y^2}{y^2} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}$$

$$\Rightarrow |x| = \frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}}$$

چون x و y هم علامت باید باشند (شرط اولیه)، پس:

$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\sin x) = \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{|\cos x|}$$

۸۹۷-۳ اگر $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ باشد، ورودی و خروجی این تابع هم علامت اند

(x و y هم علامت) در نتیجه با توجه به این موضوع y را بر حسب x به دست می آوریم:

$$y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{1-x^2} \Rightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{1-x^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} - 1 = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 + \frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{y^2 + 1}{y^2}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{y^2 + 1} \Rightarrow x = \frac{\pm y}{\sqrt{1+y^2}}$$

چون x و y باید هم علامت باشند، پس $x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ است. پس:

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow f^{-1}(\tan x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\tan x) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} = \frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} = |\cos x| \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{|\cos x|}{\cos x} \cdot \sin x$$

با توجه به آن که $\cos x \neq 0$ است، پس $\frac{|\cos x|}{\cos x} = 1$ است و در نتیجه **۳** صحیح است.

۸۹۸-۱ x را بر حسب y می نویسیم:

$$y = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow y + |x|y = x \Rightarrow x - |x|y = y$$

پس دو حالت زیر را داریم:

$$x - xy = y \Rightarrow x(1-y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1-y} \text{ باشد: } x \geq 0 \text{ (۱)}$$

چون باید $x \geq 0$ باشد پس $\frac{y}{1-y} \geq 0$ است، پس $0 \leq y < 1$ است.

$$x + xy = y \Rightarrow x(1+y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{1+y} \text{ باشد: } x < 0 \text{ (۲)}$$

چون $x < 0$ است باید $\frac{y}{1+y} < 0$ باشد، پس $-1 < y < 0$ است. در نتیجه:

$$x = \begin{cases} \frac{y}{1-y} & 0 \leq y < 1 \\ \frac{y}{1+y} & -1 < y < 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1-x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{1+x} & -1 < x < 0 \end{cases}$$

با توجه به تعریف $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ ، می توانیم ضابطه تابع f^{-1} را به

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}, |x| < 1 \text{ صورت مقابل بنویسیم:}$$

۸۹۹-۳ x را بر حسب y حساب می کنیم:

$$y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y - x = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\xrightarrow{y \geq x} (y-x)^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2xy = y^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y} = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)$$

از طرفی باید $y \geq x$ باشد تا بتوان در مرحله (*) دو طرف تساوی را به توان ۲ رساند (چون باید دو طرف هم علامت باشند) پس باید:

$$y \geq x \Rightarrow y \geq \frac{y^2 - 1}{2y} \Rightarrow \frac{y^2 - 1}{2y} - y \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{y^2 - 1 - 2y^2}{2y} \leq 0 \Rightarrow \frac{-y^2 - 1}{2y} < 0 \Rightarrow y > 0$$

$$x = \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right), y > 0 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), x > 0 \text{ پس:}$$



$$x^2 + 2x + 1 = x \Rightarrow x^2 + x + 1 = 0 \quad \text{می آوریم:}$$

$$\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

چون این معادله جواب ندارد پس توابع f و f^{-1} با یکدیگر برخورد ندارند.

$$\text{۹۰۴-۲} \quad \text{اگر تابع } f \text{ خط } y = x \text{ را قطع کند، تابع } f^{-1} \text{ نیز در همان}$$

نقطه خط $y = x$ را قطع می کند؛ پس تعدادی از نقاط تقاطع توابع f و f^{-1}

روی خط $y = x$ است.

پس این نقاط را با تقاطع تابع f و $y = x$ به دست می آوریم:

$$\frac{x+4}{x-2} = x \Rightarrow x^2 - 2x = x + 4 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

چون همین نقاط در گزینه ها هستند احتیاجی به محاسبه ضابطه تابع f^{-1}

نیست و توابع f و f^{-1} در نقاط دیگری تقاطع نیستند.

$$\text{۹۰۵-۴} \quad \text{برای ایجاد تابع } \frac{g}{f} \text{ کافی است در اعضای مشترک دامنه توابع } f$$

و g خروجی های توابع را بر هم تقسیم کنیم به شرط آن که $f(x) \neq 0$ باشد،

پس:

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f, f(x) \neq 0 \Rightarrow D_{\frac{g}{f}} = \{3, 4\}$$

$$\frac{g}{f} = \left\{ \left(3, \frac{1}{3} \right), \left(4, \frac{2}{3} \right) \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{g}{f} + g = \left\{ \left(3, \frac{1}{3} + 1 \right), \left(4, \frac{2}{3} + 2 \right) \right\} = \left\{ \left(3, \frac{4}{3} \right), \left(4, \frac{8}{3} \right) \right\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = \{x \in D_f \cap D_g \mid g(x) \neq 0\}$$

$$\text{۹۰۶-۲}$$

$$D_f = (-\infty, 4], D_g = [0, +\infty) \Rightarrow D_f \cap D_g = [0, 4]$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = [0, 4] - \{1\}$$

$$\text{۹۰۷-۲} \quad \text{معادله توابع خطی } f \text{ و } g \text{ را می نویسیم. تابع } f \text{ تابعی مبدأگذر}$$

است که از نقطه $(1, 2)$ عبور می کند و تابع g خطی است که از نقاط $(2, 0)$

و $(1, 2)$ عبور می کند، پس:

$$f \text{ شیب } = \frac{2-0}{1-2} = 2 \Rightarrow f(x) = 2x$$

$$g \text{ شیب } = \frac{2-0}{1-2} = -2 \Rightarrow g(x) = -2x + b$$

$$\xrightarrow{g(2)=0} -4 + b = 0 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow g(x) = -2x + 4$$

$$\Rightarrow (f \cdot (f - g))(x) = f(x) \times (f - g)(x)$$

$$= 2x(2x - (-2x + 4)) = 2x(4x - 4) = 8x(x - 1)$$

تابع فوق یک سهمی است که دارای ریشه های

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \text{ که } x = 1 \text{ و } x = 0$$

است. در نتیجه:

$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_{\text{رأس}} = 8 \times \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$$

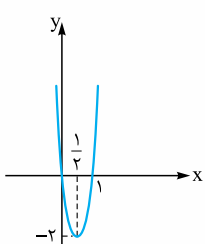
پس ۲ صحیح است.

$$\text{۹۰۸-۱} \quad \text{ابتدا ضابطه توابع خطی } f \text{ و } g \text{ را می نویسیم.}$$

تابع f از نقاط $(-3, 0)$ و $(0, 1)$ عبور کرده است، پس:

$$f \text{ شیب } = \frac{1-0}{0-(-3)} = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x + b$$

$$\xrightarrow{(0,1) \in f} b = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x + 1$$



$$\text{۹۰۰-۳} \quad \text{ابتدا وارون تابع } f \text{ را به دست می آوریم:}$$

$$3 - 2g\left(\frac{2-x}{3}\right) = y \Rightarrow g\left(\frac{2-x}{3}\right) = \frac{3-y}{2}$$

$$\Rightarrow g^{-1}\left(\frac{3-y}{2}\right) = \frac{2-x}{3} \Rightarrow 2-x = 3g^{-1}\left(\frac{3-y}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x = 2 - 3g^{-1}\left(\frac{3-y}{2}\right) \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - 3g^{-1}\left(\frac{3-x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) + 3g^{-1}\left(\frac{3-x}{2}\right) = 2 \Rightarrow k = 2$$

$$\text{۹۰۱-۳} \quad \text{ابتدا به جای } x \text{ در تساوی قرار می دهیم } \frac{x}{y}:$$

$$f(x+1) + g\left(\frac{x}{y} + 2\right) = 1$$

حال به جای x قرار می دهیم $x-1$:

$$f(x) + g\left(\frac{x-1}{y} + 2\right) = 1 \Rightarrow f(x) + g\left(\frac{x+3}{y}\right) = 1$$

حال تابع f^{-1} را به دست می آوریم:

$$f(x) = 1 - g\left(\frac{x+3}{y}\right) = y \Rightarrow g\left(\frac{x+3}{y}\right) = 1 - y$$

$$\Rightarrow g^{-1}(1-y) = \frac{x+3}{y} \Rightarrow 2g^{-1}(1-y) = x+3$$

$$\Rightarrow x = 2g^{-1}(1-y) - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2g^{-1}(1-x) - 3$$

$$\Rightarrow 2g^{-1}(1-x) - f^{-1}(x) = 3 \Rightarrow k = 3$$

$$\text{۹۰۲-۱} \quad \text{راه اول: } x \text{ را بر حسب } y \text{ به دست می آوریم و تابع معکوس } f$$

را می نویسیم:

$$y = \frac{mx+3}{x+m-2} \Rightarrow mx+3 = xy + (m-2)y$$

$$\Rightarrow mx - xy = (m-2)y - 3$$

$$\Rightarrow x(m-y) = (m-2)y - 3 \Rightarrow x = \frac{(m-2)y - 3}{m-y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{(m-2)x - 3}{-x+m} = \frac{(2-m)x + 3}{x-m}$$

برای آن که توابع f و f^{-1} برابر باشند باید داشته باشیم:

$$f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow \frac{mx+3}{x+m-2} = \frac{(2-m)x+3}{x-m}$$

تساوی فوق همواره باید برقرار باشد. در نتیجه کافی است:

$$m = 2 - m \Rightarrow m = 1$$

$$f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

پس:

$$\text{راه دوم:} \quad \text{تابع معکوس تابع } y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad \neq cb) \text{ بر خود این تابع}$$

زمانی منطبق است که $a = -d$ باشد. پس در این سؤال:

$$m = -(m-2) \Rightarrow m = 2 - m \Rightarrow m = 1$$

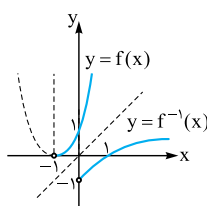
$$\text{۹۰۳-۴} \quad \text{راه اول: با رسم نمودارهای توابع}$$

f و f^{-1} تعداد نقاط تقاطع آن ها را بررسی

$$f(x) = (x+1)^2 \quad \text{می کنیم:}$$

با توجه به شکل، توابع f و f^{-1} با یکدیگر

برخورد ندارند.



$$\text{راه دوم:} \quad \text{تابع } f \text{ یک سهمی است که طول نقطه رأس آن } x = \frac{-b}{2a} = -1$$

است. این تابع به ازای $x > -1$ تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی محل (های)

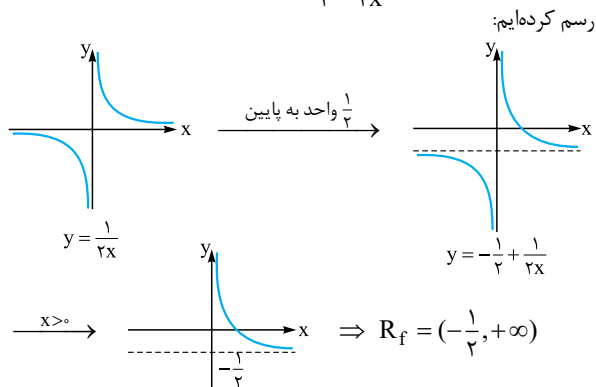
برخورد هر تابع اکیداً صعودی و معکوسش (در صورت وجود) روی خط $y = x$

است؛ پس تعداد محل های برخورد تابع $y = f(x)$ و $y = x$ را به دست





راه دوم: در زیر، نمودار تابع $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x}$ را که یک تابع هموگرافیک است



راه سوم: x را برحسب y می‌نویسیم:

$$y = \frac{1-x}{2x} \Rightarrow 2xy = 1-x \Rightarrow 2xy+x=1$$

$$\Rightarrow x(2y+1)=1 \Rightarrow x = \frac{1}{2y+1}$$

چون $x > 0$ است، باید: $2y+1 > 0 \Rightarrow y > -\frac{1}{2}$

پس: $R_{\frac{f}{g}} = (-\frac{1}{2}, +\infty)$

۹۱۱-۲ الف اگر $x \geq 0$ باشد، $x+1$ نامنفی و $x+1$ مثبت است، پس:

$$x \geq 0: |x| = x, |x+1| = x+1$$

پس به ازای $x \geq 0$ ضابطه تابع به صورت زیر است:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+x}{x+1+1} = \frac{2x}{x+2}$$

برای محاسبه برد تابع در این بازه ۲ راه زیر را داریم:

$$y = \frac{2x+4-4}{x+2} = \frac{2(x+2)-4}{x+2} = 2 - \frac{4}{x+2} \quad (۱)$$

پس با توجه به ضابطه بالا با افزایش x از صفر تا $+\infty$ ، y از ۰ تا ۲ افزایش می‌یابد (خود ۲ ایجاد نمی‌شود). پس برد تابع به ازای $x \geq 0$ بازه $[0, 2)$ است.

(۲) x را برحسب y محاسبه می‌کنیم:

$$y = \frac{2x}{x+2} \Rightarrow 2x = xy + 2y \Rightarrow 2x - xy = 2y$$

$$\Rightarrow x(2-y) = 2y \Rightarrow x = \frac{2y}{2-y}$$

چون $x \geq 0$ است، باید: $0 \leq y < 2$ تعیین علامت

ب اگر $x < 0$ باشد $|x| = -x$ است و $f(x) = 0$ خواهد بود، پس به ازای $x < 0$ تابع $\frac{f}{g}$ تابع ثابت صفر است.

پس برد تابع بازه $[0, 2)$ است.

۹۱۲-۱ توابع fog و gof را می‌نویسیم:

$$(2, 2) \in g, (2, 3) \in f \Rightarrow (2, 2) \in fog$$

$$\{(3, 1) \in g, (1, 2) \in f \Rightarrow (3, 2) \in fog$$

$$\{(-1, 3) \in g, (3, 3) \in f \Rightarrow (-1, 3) \in fog$$

$$\Rightarrow fog = \{(2, 2), (3, 2), (-1, 3)\}$$

$$\{(2, 3) \in f, (3, 1) \in g \Rightarrow (2, 1) \in gof$$

$$\{(1, 2) \in f, (2, 2) \in g \Rightarrow (1, 2) \in gof$$

$$\{(-1, 2) \in f, (2, 2) \in g \Rightarrow (-1, 2) \in gof$$

$$\{(3, 3) \in f, (3, 1) \in g \Rightarrow (3, 1) \in gof$$

تابع g از نقاط $(0, -2)$ و $(-3, 0)$ عبور کرده است، پس:

$$g \text{ شیب} = \frac{-2-0}{0-(-3)} = -\frac{2}{3} \Rightarrow g(x) = -\frac{2}{3}x + b'$$

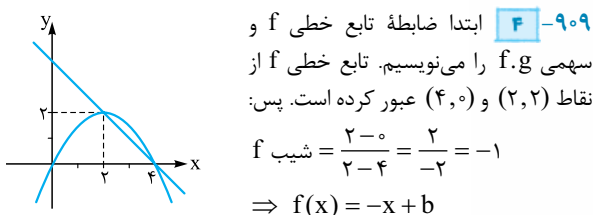
$$(0, -2) \in g \Rightarrow b' = -2 \Rightarrow g(x) = -\frac{2}{3}x - 2$$

می‌دانیم $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$ است. پس:

$$(f-g)(x) = \left(\frac{1}{3}x + 1\right) - \left(-\frac{2}{3}x - 2\right) = x + 3$$

چون $x = 2$ ریشه معادله $(f-g)(x) = ax$ است پس:

$$x + 3 = ax \xrightarrow{x=2} 5 = 2a \Rightarrow a = \frac{5}{2} = 2.5$$



$$(4, 0) \in f \Rightarrow -4 + b = 0 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow f(x) = -x + 4$$

رأس سهمی $f.g$ نقطه $(2, 2)$ است و این سهمی از نقطه $(4, 0)$ نیز عبور کرده است. می‌دانیم معادله هر سهمی با رأس (x_S, y_S) به صورت $y = a(x - x_S)^2 + y_S$ است، پس:

$$(f.g)(x) = a(x-2)^2 + 2 \xrightarrow{(4, 0) \in f.g} 4a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow (f.g)(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$$

$$= -\frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$$

می‌دانیم $(f.g)(x) = f(x).g(x)$ ، پس با تقسیم ضابطه $f.g$ بر f ضابطه تابع g را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = \frac{(f.g)(x)}{f(x)} = \frac{-\frac{1}{2}x^2 + 2x}{-x + 4} = \frac{-\frac{1}{2}x(x-4)}{-(x-4)} = \frac{1}{2}x$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow (f+g)(x) = -x + 4 + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}x + 4$$

۹۱۰-۳ اگر $x \leq 0$ باشد، $|x| = -x$ است و $g(x) = 0$ می‌شود و در نتیجه در این حالت تابع $\frac{f}{g}$ تعریف نشده است. پس $x \leq 0$ نمی‌تواند باشد.

اگر $x > 0$ باشد $|x| = x$ و $|x+1| = x+1$ است و داریم:

$$x > 0: \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2 - |x+1|}{x + |x|} = \frac{2 - (x+1)}{x + x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1-x}{2x}$$

برای محاسبه برد این تابع دو راه داریم:

راه اول: تابع را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2x} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$$

با توجه به ضابطه فوق اگر $x > 0$ باشد، مقادیر این تابع از $-\frac{1}{2}$ بیشتر خواهد بود. هر چه x بزرگ‌تر شود مقادیر ایجادشده به $-\frac{1}{2}$ نزدیک‌تر می‌شود. پس برد این تابع بازه $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ است. (به ازای $0 < x < 1$ مقادیر تابع بازه $(0, +\infty)$ خواهد بود.)



پس $g(-4) = -5$ است و در نتیجه:

$$f(g(-4)) = \frac{-4}{-4+1} = \frac{4}{3} \Rightarrow f(-5) = \frac{4}{3}$$

۹۱۹-۳ چون خروجی دستگاه $\frac{4}{3}$ است؛ پس باید:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 4$$

$$2x - 2 = 4 \Rightarrow x = 3$$

۴ خروجی تابع g است. پس:

پس ورودی اصلی $x = 3$ است:

$$3 \xrightarrow{g} 2x-2 \xrightarrow{f} \frac{x}{\sqrt{x+1}} \xrightarrow{f} \frac{4}{3}$$

۹۲۰-۴

$$g(x) = 3x + 2 \Rightarrow g(2) = 8 \Rightarrow fog(2) = f(g(2))$$

$$= f(8) \xrightarrow{f(x)=\sqrt{x+1}} f(8) = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow fog(2) = 3$$

چون $gof(a) = 3 \Rightarrow g(f(a)) = 3$ است، پس:

$$\xrightarrow{g(x)=3x+2} 3f(a) + 2 = 3 \Rightarrow f(a) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+1} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{توان } 2} a+1 = \frac{1}{9} \Rightarrow a = -\frac{8}{9}$$

۹۲۱-۲

$$fog(x) = f(g(x)) = (2g(x) - 3)^2 = (2(x+2) - 3)^2 = (2x+1)^2$$

با برابر قرار دادن $fog(x)$ و $f(x)$ ، طول نقاط برخورد توابع f و $f \circ g$ را به دست می آوریم:

$$(2x+1)^2 = (2x-3)^2 \Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = 2x-3 \\ 2x+1 = 3-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{جواب ندارد} \\ 4x = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

پس دو تابع در نقطه ای به طول $\frac{1}{2}$ متقاطع اند.

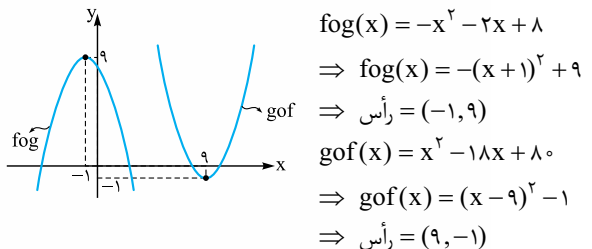
$$fog(x) = f(g(x)) = 8 - g(x) = 8 - x^2 - 2x$$

$$gof(x) = g(f(x)) = f^2(x) + 2f(x)$$

$$= (8-x)^2 + 2(8-x) = x^2 - 16x + 64 + 16 - 2x$$

$$\Rightarrow gof(x) = x^2 - 18x + 80$$

پس توابع fog و gof یک سهمی اند که نمودار آن ها به صورت زیر است:



با توجه به شکل هر خط $y = k$ که در آن $-1 \leq k \leq 9$ باشد هر دو تابع fog و gof را قطع می کند. که در بین گزینه ها $y = 3$ این ویژگی را دارد.

۹۲۳-۱

$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{2g(x)-1}{g(x)+2} = \frac{2(x+4)-1}{x+4+2} = \frac{2x+7}{x+6}$$

$$gof(x) = g(f(x)) = f(x) + 4 = \frac{2x-1}{x+2} + 4$$

$$= \frac{2x-1+4x+8}{x+2} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$\Rightarrow gof = \{(2,1), (1,2), (-1,2), (3,1)\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} D_{fog} = \{3, 2, -1\} \\ R_{gof} = \{1, 2\} \end{cases} \Rightarrow D_{fog} \cap R_{gof} = \{2\}$$

۹۱۳-۳

$$\begin{cases} (3, m^2) \in f \\ (3, m+2) \in f \end{cases} \xrightarrow{f \text{ تابع است}} m^2 = m+2$$

$$\Rightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -1 \end{cases}$$

غقق $m = 2$

اگر $m = 2$ باشد f شامل دو زوج مرتب $(2, 4)$ و $(2, 1)$ خواهد بود و در این صورت f تابع نیست، پس $m = -1$ است و در نتیجه:

$$f = \{(3,1), (2,1), (5,-1), (-3,-1), (-2,-1), (-1,4)\}$$

$$f \circ f = \{(-3,4), (5,4), (-2,4)\}$$

۹۱۴-۲

$$g(x) = x - 4 \Rightarrow g(4) = 0 \Rightarrow fog(4) = f(g(4)) = f(0)$$

$$\xrightarrow{(0,1) \in f} fog(4) = f(0) = 1$$

چون $gof(a) = fog(4)$ است، پس:

$$\begin{cases} g(f(a)) = 1 \\ g(5) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(a) = 5 \xrightarrow{(2,5) \in f} a = 2$$

۹۱۵-۲ اگر فرض کنیم $f(a) = \alpha$ است، پس $g(\alpha) = 5$ است. با توجه به آن که $(6, 5) \in g$ است (و البته g یک به یک است) پس $\alpha = 6$ است. یعنی $f(a) = 6$ است؛ در نتیجه:

$$a + \sqrt{a} = 6 \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها}} a = 4$$

۹۱۶-۳ چون $(4, 1) \in gof$ است پس $g(f(4)) = 1$ است. از طرفی چون $f(4, 5) \in f$ است، پس $f(4) = 5$ است:

$$\begin{cases} g(f(4)) = 1 \\ f(4) = 5 \end{cases} \Rightarrow g(5) = 1$$

از طرفی $(b, 1) \in g$ است. پس $g(b) = 1$ است، در نتیجه:

$$\begin{cases} g(5) = 1 \\ g(b) = 1 \end{cases} \Rightarrow b = 5$$

(در همین لحظه ما گزینه صحیح را یافتیم! اما رو هم به دست می آوریم!) از طرفی $(4, 2) \in fog$ است پس $f(g(4)) = 2$ است و چون $(3, 2) \in f$ است پس $f(3) = 2$ ، در نتیجه:

$$\begin{cases} f(g(4)) = 2 \\ f(3) = 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{چون مقدار ۲، یک بار در } f \text{ ایجاد شده}} g(4) = 3$$

چون $(a, 3) \in g$ است، پس $g(a) = 3$ است و در نتیجه:

$$\begin{cases} g(4) = 3 \\ g(a) = 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{چون مقدار ۳، یک بار در } g \text{ ایجاد شده}} a = 4$$

۹۱۷-۱

$$f(g(x)) = 4x^2 + 6x$$

$$\xrightarrow{x=-2} f(g(-2)) = 4 \times (-2)^2 + 6(-2) = 4 \Rightarrow f(g(-2)) = 4$$

اگر فرض کنیم $g(-2) = \alpha$ است. پس $f(\alpha) = 4$ است و در نتیجه با توجه به ضابطه $f(x) = 2x^2 + 4$ داریم:

$$2\alpha^2 + 4 = 4 \Rightarrow \alpha = 0$$

پس $g(-2) = 0$ است.

۹۱۸-۱

$$fog(x) = f(g(x)) = \frac{x}{x+1}$$

چون به دنبال $f(-5)$ هستیم باید ببینیم چه عضوی از دامنه تابع g ، -5 را ایجاد می کند:

$$2x + 3 = -5 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$$





$$\text{gof}(x) = a(a'x - 1) + \lambda a = aa'x + \lambda a$$

$$y = -7 + \text{fog}(x) = aa'x + \lambda aa' - \lambda = x \Rightarrow aa' = 1$$

$$y = -14 + \text{gof}(x) = aa'x + \lambda a - 14 = x \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ aa' = 1 \end{cases} \Rightarrow a' = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \\ g(x) = 2x + 16 \end{cases} \Rightarrow f(2) + g(2) = 0 + 20 = 20$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 3x \\ g(x) = x + a \end{cases} \Rightarrow \text{fog}(x) = g^2(x) + 3g(x) \quad \text{۹۲۷-۴}$$

$$= (x+a)^2 + 3(x+a) \Rightarrow \text{fog}(x) = x^2 + 2ax + a^2 + 3x + 3a$$

$$= x^2 + (2a+3)x + a^2 + 3a$$

چون نمودار توابع fog و f در نقطه‌ای به طول ۲ متقاطعند؛ پس fog(2) = f(2)

$$\text{fog}(2) = 2^2 + (2a+3) \times 2 + a^2 + 3a = a^2 + 7a + 10$$

$$f(2) = 2^2 + 3 \times 2 = 10 \Rightarrow a^2 + 7a + 10 = 10 \Rightarrow a^2 + 7a = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -7 \end{cases} \text{ غ ق}$$

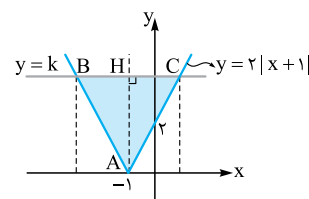
اگر a = 0 باشد، ضابطه تابع fog به صورت fog(x) = x^2 + 3x درمی‌آید که در این حالت توابع fog و f منطبق‌اند. پس a = -7 قابل قبول است.

۹۲۸-۳

$$\text{gof}(x) = g(f(x)) = \sqrt{4f(x) + 4} = \sqrt{4(x^2 + 3x) + 4}$$

$$= \sqrt{4(x^2 + 3x + 1)} = 2\sqrt{(x+1)^2} = 2|x+1|$$

$$\Rightarrow \text{gof}(x) = 2|x+1|$$



نمودار تابع $y = 2|x+1|$

رسم می‌کنیم و با خط $y = k$

تقاطع می‌دهیم.

با حل معادله زیر طول نقاط B

و C را به دست می‌آوریم:

$$2|x+1| = k \xrightarrow{k>0} |x+1| = \frac{k}{2}$$

$$\xrightarrow{k>0} \begin{cases} x+1 = \frac{k}{2} \Rightarrow x = \frac{k}{2} - 1 \\ x+1 = -\frac{k}{2} \Rightarrow x = -\frac{k}{2} - 1 \end{cases}$$

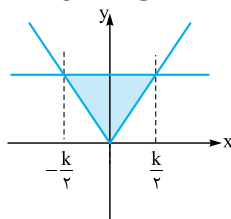
پس طول پاره خط BC برابر است با:

$$BC = (\frac{k}{2} - 1) - (-\frac{k}{2} - 1) = k \Rightarrow S_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2}$$

$$= \frac{k \times k}{2} = \frac{k^2}{2} = 9 \Rightarrow k^2 = 18 \xrightarrow{k>0} k = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

تذکره اگر تابع $y = 2|x+1|$ را ۱ واحد به سمت راست انتقال دهیم، تابع

$y = 2|x|$ ایجاد می‌شود که مساحت حاصل از این منحنی در تقاطع با خط



$y = k$ همان مساحتی است که $y = k$

در تقاطع با تابع $y = 2|x+1|$ می‌سازد.

پس می‌توانستیم برای راحتی کار مساحت

بین منحنی $y = 2|x|$ و $y = k$ را به

دست آوریم.

$$\frac{2x+7}{x+6} = \frac{6x+7}{x+2}$$

$$\Rightarrow (2x+7)(x+2) = (6x+7)(x+6)$$

$$2x^2 + 11x + 14 = 6x^2 + 43x + 42$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 32x + 28 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + 8x + 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -7 \end{cases}$$

تذکره می‌توانستیم در همان مرحله تشکیل معادله از گزینه‌ها کمک بگیریم و

معادله را حل نکنیم، مثلاً $x = -1$ تساوی را برقرار می‌کند، پس گزینه‌های ۲

و ۴ نادرست‌اند و $x = 7$ تساوی را برقرار نمی‌کند، پس ۱ صحیح است.

۹۲۴-۲ تابع f، تابعی خطی است که از نقاط (۰، ۳) و (۳، ۰) عبور

می‌کند، پس ضابطه آن به صورت زیر است:

$$f \text{ شیب } = \frac{3-0}{0-3} = -1 \xrightarrow{(0,3) \in f} f(x) = -x + 3$$

مطابق شکل سهمی g دارای ریشه‌های ۳ و -۱ است پس ضابطه آن بر $x - 3$ و

$x + 1$ بخش‌پذیر است و از نقطه (۰، ۳) عبور می‌کند. پس ضابطه آن به صورت

زیر است:

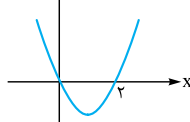
$$g(x) = a(x-3)(x+1) \xrightarrow{g(0)=3} a \times (-3) \times 1 = 3$$

$$\Rightarrow a = -1 \Rightarrow g(x) = -(x-3)(x+1)$$

در نتیجه: $\text{fog}(x) = f(g(x)) = -g(x) + 3 = (x-3)(x+1) + 3$

$$= x^2 - 2x - 3 + 3 \Rightarrow \text{fog}(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$$

پس نمودار آن به صورت مقابل است:



۹۲۵-۱ فرض می‌کنیم عرض از مبدأ هر دو تابع b و شیب خط f

برابر a است. با توجه به شکل، شیب g برابر $-\frac{b}{6}$ است و معادله این توابع

به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f(x) = ax + b \\ g(x) = -\frac{b}{6}x + b \end{cases}$$

معادله $f+g$ و $f-g$ به صورت زیر است و داریم:

$$(f+g)(x) = (a - \frac{b}{6})x + 2b \xrightarrow{\text{ثابت } f+g} a - \frac{b}{6} = 0$$

$$\Rightarrow b = 6a$$

$$(f-g)(x) = (a + \frac{b}{6})x \xrightarrow{\text{همانی } f-g} a + \frac{b}{6} = 1$$

$$\Rightarrow a + a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 3$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$$

پس:

$$g(x) = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow g(-6) = 6 \Rightarrow \text{fog}(-6) = f(6) = 6$$

۹۲۶-۴ اگر فرض کنیم شیب خط g برابر a و شیب خط f برابر a' است،

$$g(x) = ax + b \xrightarrow{g(-8)=0} -8a + b = 0 \Rightarrow b = 8a$$

$$\Rightarrow g(x) = ax + 8a$$

$$f(x) = a'x - 1$$

با تشکیل fog و gof و با توجه به همانی بودن توابع داده‌شده داریم:

$$\text{fog}(x) = a'(ax + 8a) - 1 = aa'x + 8aa' - 1$$



$$= 2(t-3)^2 + 11(t-3) + 20 = 2t^2 - 12t + 18 + 11t - 33 + 20$$

$$\Rightarrow g(t) = 2t^2 - t + 5 \Rightarrow g(x) = 2x^2 - x + 5$$

پس ضابطه fog به صورت زیر است:

$$f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 4x^2 - 2x + 13$$

۹۳۴-۳ اگر فرض کنیم $g(x) = t$ باشد، داریم:

$$2x - 3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$f(g(x)) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13$$

پس:

$$\Rightarrow f(t) = 4\left(\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{t+3}{2}\right) + 13\right)$$

$$= (t+3)^2 - 2(t+3) + 52 = t^2 + 6t + 9 - 2t - 6 + 52 = t^2 + 4t + 55$$

$$= t^2 - 2t + 5 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

۹۳۵-۳ اگر فرض کنیم $t = 2(x-1)$ ، سعی می‌کنیم خروجی تابع fog

را بر حسب t بنویسیم:

$$t = 2(x-1) \Rightarrow t = 2(x^2 - 2x + 1)$$

$$\frac{x^2}{2} = \frac{t}{2} \Rightarrow \frac{t}{2} = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow \frac{t}{2} = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow 6x - 3x^2 = 3 - \frac{t}{2}$$

پس با توجه به آن که $6x - 3x^2 = 3 - \frac{t}{2}$ است، داریم:

$$g(f(x)) = \frac{6x - 3x^2}{3 - \frac{t}{2}} \Rightarrow g(t) = \frac{3 - \frac{t}{2}}{3 - \frac{t}{2}} \Rightarrow g(x) = \frac{3 - \frac{t}{2}}{3 - \frac{t}{2}}$$

۹۳۶-۴ اگر فرض کنیم $t = 2x - 3$ است، داریم:

$$2x = t + 3 \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

$$f(t) = 4\left(\frac{t+3}{2}\right)^2 - 14\left(\frac{t+3}{2}\right) + 13 = (t+3)^2 - 7(t+3) + 13$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 6t + 9 - 7t - 21 + 13 = t^2 - t + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

۹۳۷-۲ ابتدا ضابطه تابع f را به دست می‌آوریم. اگر t عضوی از دامنه f

باشد، فرض می‌کنیم $t = 2x - 1$ و داریم:

$$2x - 1 = t \Rightarrow x = \frac{t+1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{t+1}{2}\right) = 4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 2$$

$$\Rightarrow fof(t) = (t^2 + 2t + 2)^2 + 2(t^2 + 2t + 2) + 2$$

$$= t^4 + 4t^3 + 10t^2 + 12t + 10$$

$$\Rightarrow fof(x) = x^4 + 4x^3 + 10x^2 + 12x + 10$$

پس ضریب x^2 در ضابطه fof(x) برابر ۱۰ است.

۹۳۸-۴

$$\left(f \circ \frac{1}{f}\right)(x) = f\left(\frac{1}{f}(x)\right) = \frac{\frac{1}{f(x)}}{1 + \frac{1}{f(x)}} = \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{f(x)+1}{f(x)}} = \frac{1}{f(x)+1}$$

$$\frac{f(x) \neq 0}{f(x)+1}$$

پس با توجه به تساوی $gof(x) = \left(f \circ \frac{1}{f}\right)(x)$ ، داریم:

$$g\left(\frac{1}{f(x)+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)+1} + 1} \Rightarrow g(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = 2 - |x - 2| \Rightarrow fof(x) = 2 - |f(x) - 2| \quad ۹۲۹-۳$$

$$\Rightarrow fof(x) = 2 - |2 - |x - 2|| = 2 - |-|x - 2||$$

چون $|a| = |-a|$ است، پس $|-|x - 2|| = |x - 2|$ است، پس:

$$fof(x) = 2 - |x - 2| = f(x)$$

۹۳۰-۳ توابع f و fog خطی هستند؛ پس ابتدا ضابطه این توابع

را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}, 2\right) \in f \\ (0, 1) \in f \end{cases} \Rightarrow \text{شیب } f = \frac{2-1}{\frac{1}{2}-0} = 2$$

$$\xrightarrow{(0,1) \in f} f(x) = 2x + 1$$

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}, 2\right) \in fog \\ (0, 5) \in fog \end{cases} \Rightarrow \text{شیب } fog = \frac{5-2}{0-\frac{1}{2}} = \frac{3}{-\frac{1}{2}} = -6$$

$$\xrightarrow{(0,5) \in fog} fog(x) = -6x + 5$$

چون $f(x) = 2x + 1$ است، پس $f(g(x)) = 2g(x) + 1$

است. از طرفی $fog(x) = -6x + 5$ می‌باشد، پس:

$$2g(x) + 1 = -6x + 5$$

$$\Rightarrow 2g(x) = -6x + 4$$

$$\Rightarrow g(x) = -3x + 2$$

چون شیب g منفی و عرض از مبدأ آن مثبت است پس

نمودار آن ۳ است.

$$fog(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 - 4$$

۹۳۱-۲

چون $fog(x) = x^2 + 4x^2$ است، پس:

$$(g(x))^2 - 4 = x^2 + 4x^2 \Rightarrow (g(x))^2 = x^2 + 4x^2 + 4$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 = (x^2 + 2)^2 \Rightarrow \begin{cases} g(x) = x^2 + 2 \\ \text{یا} \\ g(x) = -(x^2 + 2) \end{cases}$$

پس در بین گزینه‌ها، ۲ می‌تواند ضابطه‌ای برای تابع g باشد.

۹۳۲-۳ راه اول: اگر فرض کنیم $t = 2x - 1$ است، داریم:

$$\begin{cases} x = \frac{t+1}{2} \\ f(g(x)) = 4x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow f(t) = 4\left(\frac{t+1}{2}\right)^2 - 1 = t^2 + 2t \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x$$

راه دوم: اگر $t = 2x - 1$ باشد، $4x^2 - 1$ را بر حسب t به صورت

$$t = 2x - 1 \xrightarrow{\text{توان}} t^2 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$\xrightarrow{+2t} t^2 + 2t = 4x^2 - 4x + 1 + 2(2x - 1)$$

$$\Rightarrow t^2 + 2t = 4x^2 - 1 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t \Rightarrow f(x) = x^2 + 2x$$

حال $gof(x)$ را تشکیل می‌دهیم:

$$gof(x) = g(f(x)) = 2f(x) - 1 = 2(x^2 + 2x) - 1 = 2x^2 + 4x - 1$$

۹۳۳-۳ اگر فرض کنیم $f(x) = t$ است، داریم:

$$2x + 3 = t \Rightarrow x = \frac{t-3}{2}$$

$$g(t) = 8x^2 + 22x + 20$$

پس:

$$\xrightarrow{x = \frac{t-3}{2}} g(t) = 8\left(\frac{t-3}{2}\right)^2 + 22\left(\frac{t-3}{2}\right) + 20$$





$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad \text{۲-۹۴۴}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}, D_g : x - x^2 \geq 0 \Rightarrow D_g = [0, 1]$$

$$0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \quad \text{پس باید } f(x) \in [0, 1] \text{ در نتیجه:}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1) & 0 \leq \frac{1+x^2}{1-x^2} \xrightarrow{1-x^2 > 0} 1-x^2 > 0 \\ (2) & \frac{1+x^2}{1-x^2} \leq 1 \end{cases}$$

چون شرط برقراری نامعادله (۱) آن است که $1-x^2 > 0$ باشد، پس با فرض آن که $x \in (-1, 1)$ است می‌توان دو طرف نامساوی (۲) را در $1-x^2$ ضرب کرد:

$$1+x^2 \leq 1-x^2 \Rightarrow 2x^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

پس $x = 0$ تنها عضو دامنه تابع است.

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad \text{۲-۹۴۵}$$

$$D_f = \mathbb{R}, D_g : x - x^2 \geq 0 \Rightarrow x \in [0, 1]$$

$$f(x) \in [0, 1] \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{پس باید:}$$

چون $1+x^2$ مثبت است، می‌توان آن را در طرفین نامساوی بالا ضرب کرد:

$$\xrightarrow{\times(1+x^2)} 0 \leq 1-x^2 \leq 1+x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq 1-x^2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 & (1) \\ 1-x^2 \leq 1+x^2 \Rightarrow 0 \leq 2x^2 \Rightarrow x \in \mathbb{R} & (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} x \in [-1, 1]$$

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad \text{۱-۹۴۶}$$

$$D_g : \frac{x+1}{x} \geq 0, x \neq 0 \Rightarrow x \leq -1 \text{ یا } x > 0$$

$$D_f : -x^2 + 3x - 2 \geq 0 \Rightarrow -(x-1)(x-2) \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow D_{\text{fog}} = \{x \leq -1 \text{ یا } x > 0 \mid 1 \leq \frac{x+1}{x} \leq 2\}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \underbrace{\frac{x+1}{x}}_{g(x)} \leq 2 \xrightarrow{\text{توان}} 1 \leq \frac{x+1}{x} \leq 4$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 4 \xrightarrow{-1} 0 \leq \frac{1}{x} \leq 3$$

برای برقراری نامساوی فوق لازم است $x > 0$ باشد. پس با این فرض می‌توان طرفین نامساوی را در x ضرب کرد:

$$\xrightarrow{\times x} 0 \leq 1 \leq 3x \Rightarrow 1 \leq 3x \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x$$

$$\Rightarrow D_{\text{fog}} = \{x \leq -1 \text{ یا } x > 0 \mid \frac{1}{3} \leq x\} = [\frac{1}{3}, +\infty)$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad \text{۱-۹۴۷}$$

$$D_f : x + |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \geq -x$$

همواره برقرار است چه x مثبت، چه منفی و چه صفر

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$D_g : x^2 - 4x \neq 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

پس باید ببینیم به ازای چه اعدادی، $f(x)$ برابر صفر یا ۴ است:

$$\sqrt{x+|x|} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : \sqrt{2x} = 0 \Rightarrow x = 0 \\ x < 0 : \sqrt{x-x} = 0 \end{cases}$$

همواره برقرار

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$\text{۴-۹۳۹}$$

$$D_f = \{1, 2, 3\}$$

پس باید ببینیم چه اعضای از دامنه تابع g ، مقادیر ۱، ۲ و ۳ را ایجاد می‌کنند:

$$\frac{2x}{2x-1} = 1 \Rightarrow 2x = 2x-1 \Rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$\frac{2x}{2x-1} = 2 \Rightarrow 2x = 4x-2 \Rightarrow -2x = -2 \Rightarrow x = 1$$

$$\frac{2x}{2x-1} = 3 \Rightarrow 2x = 6x-3 \Rightarrow -4x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow D_{\text{fog}} = \{1, \frac{3}{4}\} \Rightarrow \text{مجموع اعضای دامنه} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} \quad \text{۳-۹۴۰}$$

$$D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{\text{gof}} = \{x \in D_f \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = D_f$$

با توجه به آن که D_g همه اعداد حقیقی است پس دامنه تابع f همان دامنه

تابع g است: $D_f = D_{\text{gof}} = \mathbb{R} - \{-1\}$

حال دامنه تابع $f \circ g$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} \Rightarrow g(x) \neq -1 \Rightarrow 3x-1 \neq -1$$

$$3x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D_{\text{fog}} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \quad \text{۳-۹۴۱}$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$[2, +\infty) \quad \sqrt{x-2} \quad (-\infty, 4]$$

$$\Rightarrow D_{\text{fog}} = \{2 \leq x \mid \sqrt{x-2} \leq 4\} \Rightarrow \sqrt{x-2} \leq 4$$

$$\xrightarrow{\text{توان}} x-2 \leq 16 \Rightarrow x \leq 18$$

$$\Rightarrow D_{\text{fog}} = \{2 \leq x \mid x \leq 18\} = [2, 18]$$

$$\Rightarrow b-a = 18-2 = 16$$

$$\text{۲-۹۴۲} \quad \text{اگر نمودار تابع } g(x)=f(x-1) \text{ را ۲ واحد به سمت چپ}$$

ببریم (یعنی به جای x قرار دهیم $x+2$) نمودار تابع $g(x+2)=f(x+1)$

ایجاد می‌شود؛ پس ابتدا دامنه تابع $g(x)=f(x-1)$ را تعیین می‌کنیم:

$$g(x) = f(x-1) = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow 2x-x^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow x(2-x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_g = [0, 2]$$

اگر از هر یک از اعضای دامنه تابع $g(x)=f(x-1)$ ، ۲ واحد کم کنیم دامنه

تابع $k(x)=f(x+1)$ به دست می‌آید، پس:

$$\text{۱-۹۴۳} \quad \text{اگر فرض کنیم } h(x)=f(\frac{x}{2}) \text{ و } k(x)=f(2x+1) \text{، با}$$

توجه به دامنه تابع f ، ابتدا دامنه توابع h و k را محاسبه می‌کنیم، پس باید:

$$D_h : \frac{x}{2} \in D_f \Rightarrow -2 \leq \frac{x}{2} \leq 4 \xrightarrow{\times 2} -4 \leq x \leq 8$$

$$\Rightarrow D_h = [-4, 8]$$

$$D_k : (2x+1) \in D_f \Rightarrow -2 \leq 2x+1 \leq 4$$

$$\xrightarrow{-1} -12 \leq 2x \leq -6 \xrightarrow{\div 2} -6 \leq x \leq -3$$

$$\Rightarrow D_k = [-6, -3]$$

دامنه تابع $g(x)=f(\frac{x}{2})-3f(2x+1)$ برابر $D_h \cap D_k$ است.

$$D_g = [-4, 8] \cap [-6, -3] = [-4, -3] \quad \text{پس:}$$



$$\Rightarrow \log(x^2 - 15x) \leq 2 \Rightarrow x^2 - 15x \leq 100$$

$$\downarrow \log 100$$

$$\Rightarrow x^2 - 15x - 100 \leq 0 \Rightarrow (x - 20)(x + 5) \leq 0 \Rightarrow -5 \leq x \leq 20$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = ((-\infty, 0) \cup (15, +\infty)) \cap [-5, 20]$$

$$= [-5, 0) \cup (15, 20]$$

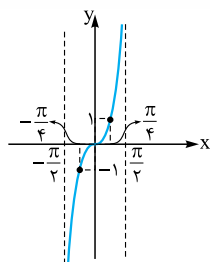
پس $D_{f \circ g}$ شامل ۱۰ عدد صحیح $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 16, 17, 18, 19$ و ۲۰ است.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۹۵۲-۳

$$D_f = [-1, 1] - \{0\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \left\{ -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \mid \tan x \in [-1, 1] - \{0\} \right\}$$



پس باید $-1 \leq \tan x \leq 1$ باشد و البته $\tan x \neq 0$ باشد. پس مطابق نمودار این تابع در بازه $(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ داریم:

$$-1 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\tan x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

پس:

$$D_{f \circ g} = \left\{ -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \mid -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}, x \neq 0 \right\} = \left(-\frac{\pi}{4}, 0 \right) \cup \left(0, \frac{\pi}{4} \right)$$

۹۵۳-۳

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \leq 2 \mid 3 + 2\sqrt{2-x} \leq m\}$$

$$\downarrow x \leq m$$

پس: $2\sqrt{2-x} \leq m-3$
اگر $m < 3$ باشد نامعادله فوق جواب ندارد. اگر $m > 3$ باشد، بی نهایت جواب دارد، اما اگر $m = 3$ باشد تنها عضو دامنه $x = 2$ خواهد بود:

$$m = 3: 2\sqrt{2-x} \leq 0 \Rightarrow x = 2$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۹۵۴-۱

$$D_g = \mathbb{R}, D_h: 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D_f: -1 \leq 2x - 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2x \leq 2 \xrightarrow{\div 2} 0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2}{1+x^2} \in [0, 1]\}$$

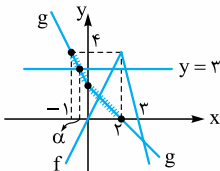
$$0 \leq \frac{x^2}{1+x^2} \leq 1 \xrightarrow{\frac{1+x^2}{1+x^2}} 0 \leq x^2 \leq 1+x^2$$

پس باید:

$$\begin{cases} 0 \leq x^2 \Rightarrow \text{همواره صحیح} \\ x^2 \leq 1+x^2 \Rightarrow \text{همواره صحیح} \end{cases} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R}$$

۹۵۵-۱ باید $f \circ g(x) > 0$ باشد. با توجه به شکل تابع f در بازه $(0, 3)$ ، مقادیری مثبت دارد؛ پس x هایی از دامنه g قابل قبول اند که به ازای آن‌ها به ازای آن‌ها $0 < g(x) < 3$ شود. با توجه به شکل اگر $\alpha < x < 2$ باشد،



$0 < g(x) < 3$ خواهد بود. چون $-1 < \alpha < 0$ است، پس تنها دو عدد صحیح ۰ و ۱ عضو دامنه تابع خواهند بود که مجموع آن‌ها ۱ است.

پس به ازای $x \leq 0$ ، $f(x) = 0$ است. پس کل این اعداد نامثبت عضو دامنه تابع $g \circ f$ نیستند.

$$\sqrt{x+|x|} = 4 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0: \sqrt{2x} = 4 \Rightarrow x = 8 \\ x < 0: \sqrt{0} = 4 \end{cases}$$

پس $x = 8$ عضو دامنه $g \circ f$ نیست. در نتیجه:

$$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{f(x) \in \mathbb{R} - \{0, 4\}}_{x > 0, x \neq 8}\} = (0, 8) \cup (8, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۹۴۸-۲

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f: (2x-5)(5-x) \geq 0 \Rightarrow x \in [\frac{5}{2}, 5]$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid [x] \in [\frac{5}{2}, 5]\} \Rightarrow \frac{5}{2} \leq [x] \leq 5$$

با توجه به نامساوی فوق، چون $[x]$ عددی صحیح است پس نمی‌تواند $\frac{5}{2}$ را ایجاد کند و کمترین عدد صحیحی که می‌تواند در این بازه ایجاد کند ۳ است، پس باید: $3 \leq [x] \leq 5 \Rightarrow 3 \leq x < 6 \Rightarrow D_{f \circ g} = [3, 6)$

تذکره: اگر $[x] = 5$ باشد، آن‌گاه $5 \leq x < 6$ است.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۹۴۹-۴

$$D_g: x^2 + 2x > 0 \Rightarrow x < -2 \text{ یا } x > 0$$

$$D_f: 3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

چون باید $g(x) \in D_f$ باشد، پس:

$$g(x) \leq 3 \Rightarrow \log_2(x^2 + 2x) \leq 3$$

$$\xrightarrow{\text{چون پایه از ۱ بزرگتر است}} x^2 + 2x \leq 2^3$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0 \Rightarrow x \in [-4, 2]$$

پس x هایی از D_g که عضو بازه $[-4, 2]$ باشند مجموعه اعضای دامنه $f \circ g$ را تشکیل می‌دهند:

$$((-\infty, -2) \cup (0, +\infty)) \cap [-4, 2] = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

۹۵۰-۲ ابتدا دامنه تابع f را به دست می‌آوریم؛ پس باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و عبارت زیر رادیکال نامنفی باشد، پس:

$$D_f: \begin{cases} x-2 > 0 \Rightarrow x > 2 \quad (1) \\ 2 - \log_2(x-2) \geq 0 \Rightarrow \log_2(x-2) \leq 2 \\ \Rightarrow x-2 \leq 2^2 \Rightarrow x \leq 10 \quad (2) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} D_f = (2, 10]$$

اعداد حقیقی مانند x عضو دامنه تابع $k(x) = f(x+3)$ هستند که $(x+3) \in D_f$ باشد، پس باید:

$$2 < x+3 \leq 10 \xrightarrow{-3} -1 < x \leq 7 \Rightarrow D_k = (-1, 7]$$

تذکره: در واقع اگر فرض کنیم $g(x) = x+3$ ، شما باید دامنه تابع $f \circ g$ را با فرض آن که $D_f = (2, 10]$ تعیین کنید.

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

۹۵۱-۱

$$D_g: x^2 - 15x > 0 \Rightarrow x(x-15) > 0 \Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 15$$

$$D_f = (-\infty, 2]$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x < 0 \text{ یا } x > 15 \mid \log(x^2 - 15x) \leq 2\}$$





پس تابع f در بازه $(-2, 1)$ زیر محور x ها قرار می گیرد. پس اگر بخواهیم بدانیم به ازای چه ورودی‌هایی تابع $f \circ g$ زیر محور x ها است باید اعضای از دامنه g را بیابیم که $1 < g(x) < -2$ باشد: $A = \{x \in D_g \mid f(g(x)) < 0\}$

$$\Rightarrow -2 < \frac{1}{4}(x-3) < 1 \Rightarrow -4 < x-3 < 4 \Rightarrow -1 < x < 7$$

پس در بازه $(-1, 7)$ تابع $f \circ g$ زیر محور x ها است.

۹۶۰-۲ ابتدا دامنه تابع $f \circ g$ را به دست می آوریم:

$$D_{f \circ g} = \{x \in [-1, 1] \mid 3x-7 \in [-1, 1]\}$$

$$\xrightarrow{[-1, 1]} -\frac{4}{3} \leq x \leq -1$$

$$f \circ g(x) = 3(3x-7) - 7 = 9x - 28 \quad \text{در نتیجه:}$$

حال برد $f \circ g$ را با توجه به دامنه آن حساب می کنیم. چون تابع $f \circ g$ خطی و

اکیداً صعودی است:

$$R_{f \circ g} = [f \circ g(-\frac{4}{3}), f \circ g(-1)]$$

$$\begin{cases} f \circ g(-\frac{4}{3}) = -12 - 28 = -40 \\ f \circ g(-1) = -9 - 28 = -37 \end{cases} \Rightarrow R_{f \circ g} = [-40, -37]$$

پس برد $f \circ g$ شامل ۴ عدد $-40, -37, -38, -39$ است.

۹۶۱-۲ با توجه به معادله $g(f(x)) = -2$ باید اعدادی از دامنه تابع g

را بیابیم که خروجی -2 ایجاد می کنند:

$$x^2 + x - 2 = -2 \Rightarrow x^2 + x = 0 \Rightarrow x = 0, -1$$

پس باید بررسی کنیم که به ازای چه x هایی $f(x) = 0$ یا $f(x) = -1$ است.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

اما می دانیم $f(x) = 0$ است. یعنی تابع f همواره یا

خروجی صفر دارد و یا -1 . پس به ازای هر عدد حقیقی تابع f صفر و -1

ایجاد کرده و به g تحویل می دهد و چون g به ازای -1 و صفر، همواره

مقدار -2 را ایجاد می کند پس مجموعه جوابها برابر $\mathbb{R}$ است.

۹۶۲-۱ اگر فرض کنیم $2x-3 = t$ است، داریم:

$$2x-3 = t \Rightarrow x = \frac{t+3}{2}$$

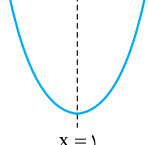
$$f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5) \Rightarrow f(t) = 4((\frac{t+3}{2})^2 - 4(\frac{t+3}{2}) + 5)$$

$$\Rightarrow f(t) = 4(\frac{(t+3)^2}{4} - 2(t+3) + 5)$$

$$= (t+3)^2 - 8(t+3) + 20 \Rightarrow f(t) = t^2 - 2t + 5$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2x + 5$$

تابع f یک سهمی به شکل مقابل است:



$$x_{\text{رأس}} = \frac{-b}{2a} = 1$$

پس تابع f در هر بازه زیرمجموعه $(1, +\infty)$ یا

$(-\infty, 1]$ یک به یک است. پس با توجه به گزینه ها

در بازه $[1, +\infty)$ یک به یک است.

۹۶۳-۴ وقتی $f^{-1}(\alpha) = \beta$ است، داریم $f(\beta) = \alpha$. پس:

$$f^{-1}(g(a)) = 6 \Rightarrow f(6) = g(a)$$

از طرفی چون $f(x) = 2x - 5$ است، پس:

$$f(6) = 2 \times 6 - 5 = 7 \xrightarrow{f(6)=g(a)} g(a) = 7$$

با توجه به تابع g ، $(4, 7) \in g$ است یعنی $g(4) = 7$ است. پس $a = 4$ است.

۹۵۶-۲ تابع f دارای ۲ ریشه $\frac{1}{4}$ و $-\frac{1}{4}$ است؛ یعنی $f(-\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{4}) = 0$

است؛ پس برای به دست آوردن ریشه های تابع $f \circ g$ باید به دنبال اعضای از دامنه g باشیم که به ازای آنها $g(x) = \frac{1}{4}$ یا $g(x) = -\frac{1}{4}$ بشود:

$$x - \sqrt{x} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - t = \frac{1}{4} \Rightarrow t^2 - t - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow (t-3)(t+2) = 0$$

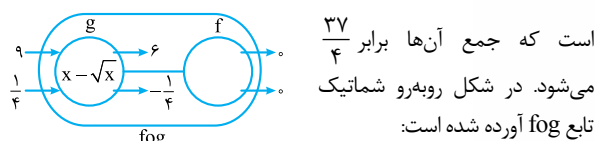
$$\Rightarrow \begin{cases} t=3 \Rightarrow \sqrt{x}=3 \Rightarrow x=9 \\ t=-2 \text{ غلط} \end{cases}$$

$$x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - t = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (t - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

پس $f \circ g(\frac{1}{4}) = 0$ و $f \circ g(9) = 0$ است و تابع $f \circ g$ دارای ریشه های $\frac{1}{4}$ و 9



۹۵۷-۲ چون تابع f محور x ها را در دو نقطه $\frac{1}{4}$ و 9 قطع می کند،

$$f(6) = f(-\frac{1}{4}) = 0$$

داریم:

تابع $f \circ g$ ، زمانی محور x ها را قطع می کند که $f \circ g(x) = 0$ باشد؛ یعنی در

نقاطی که به ازای طول آنها x هایی که $g(x) = \frac{1}{4}$ یا $g(x) = -\frac{1}{4}$ باشد:

$$f \circ g(x) = 0 \Rightarrow \{x \in D_g \mid f(g(x)) = 0\}$$

$$\begin{cases} x - \sqrt{x} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها}} x = 9 \\ x - \sqrt{x} = -\frac{1}{4} \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه ها}} x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \{\frac{1}{4}, 9\}$$

۹۵۸-۴ باید ببینیم معادله $f(f(x)) = 0$ چند جواب دارد.

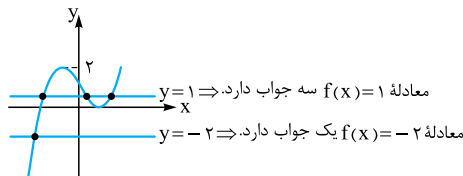
با توجه به شکل، ریشه های تابع f ، 1 و -2 هستند. پس باید دید به ازای

چند x ، $f(x) = 1$ یا $f(x) = -2$ است:

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \Rightarrow f(f(x)) = f(1) \Rightarrow f(f(x)) = 0 \\ f(x) = -2 \Rightarrow f(f(x)) = f(-2) \Rightarrow f(f(x)) = 0 \end{cases}$$

پس باید دید معادلات $f(x) = 1$ و $f(x) = -2$ چند جواب دارند. برای

پیدا کردن تعداد جواب های این دو معادله از روش هندسی استفاده می کنیم:



پس با توجه به شکل، تعداد جواب های معادله $f(f(x)) = 0$ برابر ۴ است.

۹۵۹-۲ ابتدا $f(x)$ را تعیین علامت می کنیم:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} & -2 & 1 & & \\ \hline x^2 + x - 2 & + & - & + & + \end{array}$$



۹۶۹-۱ اگر $f^{-1}(\alpha) = \beta$ باشد، $g(\beta) = \alpha$ است؛ پس چون $g^{-1}(f(a)) = 3$ است داریم $g(3) = f(a)$. چون $(3, -2) \in g$ است پس $g(3) = -2$ است. در نتیجه:

$$\begin{cases} g(3) = -2 \\ g(3) = f(a) \end{cases} \Rightarrow f(a) = -2$$

a عددی است که تابع f به ازای آن مقداری منفی ایجاد کرده است. با توجه به ضابطه تابع f ، پس $a < 0$ است:

$$f(a) = -\sqrt{-a} = -2 \Rightarrow \sqrt{-a} = 2 \Rightarrow a = -4$$

۹۷۰-۴ $g^{-1} \circ f^{-1}(\lambda) = g^{-1}(\underbrace{f^{-1}(\lambda)}_{\alpha})$

ابتدا $f^{-1}(\lambda)$ را حساب می‌کنیم، اگر $f^{-1}(\lambda) = \alpha$ باشد، $f(\alpha) = \lambda$ است:

$$\frac{2}{5}\alpha - 4 = \lambda \Rightarrow \frac{2}{5}\alpha = 12 \Rightarrow \alpha = 30$$

حالا باید $g^{-1}(30)$ را حساب کنیم، اگر $g^{-1}(30) = \beta$ باشد داریم $g(\beta) = 30$ پس:

$$\beta^2 + \beta = 30 \Rightarrow \beta = 5$$

۹۷۱-۴ راه اول: اگر فرض کنیم $f^{-1}(3) = \alpha$ داریم $f(\alpha) = 3$. از

$$f(g(x)) = \frac{2x}{x+1} \Rightarrow f(g(x)) = \frac{2x}{x+1}$$

با فرض آن که $g(\beta) = \alpha$ باشد، داریم:

$$f(\underbrace{g(\beta)}_{\alpha}) = \frac{2\beta}{\beta+1} \xrightarrow{f(\alpha)=3} f(\alpha) = \frac{2\beta}{\beta+1} = 3$$

$$\Rightarrow 2\beta = 3\beta + 3 \Rightarrow \beta = -3$$

در نتیجه $g(-3) = \alpha$ است، پس $g^{-1}(\alpha) = -3$ است. از طرفی با توجه به تساوی $g^{-1}(x) = 3x + 9$ داریم:

$$g^{-1}(\alpha) = 3\alpha + 9 \xrightarrow{g^{-1}(\alpha)=-3} 3\alpha + 9 = -3$$

$$\Rightarrow 3\alpha = -12 \Rightarrow \alpha = -4 \Rightarrow f^{-1}(3) = \alpha = -4$$

راه دوم: در حالت کلی داریم $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$ ؛ پس ابتدا معکوس تابع $y = \frac{2x}{x+1}$ را به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{2x}{x+1} \Rightarrow yx + y = 2x \Rightarrow 2x - yx = y$$

$$\Rightarrow x(2-y) = y \Rightarrow x = \frac{y}{2-y} \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x}{2-x}$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(x) = \frac{x}{2-x} \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(x)) = \frac{x}{2-x}$$

$$\Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(3)) = -3 \Rightarrow 3f^{-1}(3) + 9 = -3 \Rightarrow f^{-1}(3) = -4$$

۹۷۲-۲ ضابطه هر یک از توابع خطی f و g را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} (3, 0) \in f \\ (0, 2) \in f \end{cases} \Rightarrow f \text{ شیب} = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{(0,2) \in f} f(x) = -\frac{2}{3}x + 2$$

$$\begin{cases} (0, 1) \in g \\ (-2, 0) \in g \end{cases} \Rightarrow g \text{ شیب} = \frac{1-0}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{(0,1) \in g} g(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

$$\Rightarrow g(2) = \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2 \Rightarrow f^{-1}(g(2)) = f^{-1}(2)$$

۹۶۴-۲ اگر $f^{-1}(\alpha) = \beta$ باشد، $f(\beta) = \alpha$ است؛ پس وقتی

$f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، داریم $f(6) = g(2a)$. چون $(6, 3) \in f$ است

پس $f(6) = 3$ و در نتیجه $g(2a) = 3$ خواهد بود. پس:

$$g(2a) = \frac{2a}{2a-1} = 3 \Rightarrow 2a = 6a - 3 \Rightarrow -4a = -3 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۹۶۵-۲ $g^{-1} \circ f^{-1}(a) = \lambda \Rightarrow g^{-1}(f^{-1}(a)) = \lambda$

$$\Rightarrow g(\lambda) = f^{-1}(a)$$

از طرفی $g(\lambda) = \sqrt{40 + 9} = 7$ است، پس:

$$f^{-1}(a) = 7 \Rightarrow f(7) = a \xrightarrow{(7,2) \in f} a = 3$$

۹۶۶-۳ اگر $g^{-1} \circ f^{-1}(2) = -2$ باشد داریم $g^{-1}(f^{-1}(2)) = -2$ در

نتیجه $g(-2) = f(2)$ است. چون دامنه تابع g مجموعه $\{4, k, 3\}$ است و با توجه به آن که $g(-2)$ موجود است پس $-2 \in D_g$ است پس $k = -2$ است. از طرفی دامنه تابع f مجموعه $\{3, 5, m\}$ است که با توجه به آن که $f(2)$ موجود است پس $2 \in D_f$ در نتیجه $m = 2$ است. پس:

$$g = \{(4, 3), (-2, 1), (3, n)\}$$

$$f = \{(3, 2), (5, -3), (2, n-1)\}$$

با توجه به تساوی $g(-2) = f(2)$ داریم:

$$\begin{cases} g(-2) = 1 \\ f(2) = n-1 \end{cases} \Rightarrow n-1 = 1 \Rightarrow n = 2$$

$$f^{-1} \circ g^{-1}(3) = f^{-1}(\underbrace{g^{-1}(3)}_{n=2}) = f^{-1}(2) = 3$$

پس:

۹۶۷-۴ ابتدا توابع g^{-1} و $g^{-1} \circ f^{-1}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\}$$

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$$

$$\begin{cases} 1 \xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g^{-1}} 4 \Rightarrow (1, 4) \in g^{-1} \circ f^{-1} \\ 2 \xrightarrow{f} 5 \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ 3 \xrightarrow{f} 4 \xrightarrow{g^{-1}} \times \\ 4 \xrightarrow{f} 6 \xrightarrow{g^{-1}} 5 \Rightarrow (4, 5) \in g^{-1} \circ f^{-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g^{-1} \circ f^{-1} = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

اگر فرض کنیم $h = g^{-1} \circ f^{-1}$ ، ابتدا دامنه تابع h را به دست می‌آوریم:

$$D_{h-f} = D_h \cap D_f = \{1, 4\}$$

$$h - f = \{(1, 4-2), (4, 5-6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\}$$

پس برد تابع $h - f$ مجموعه $\{2, -1\}$ است.

۹۶۸-۱ ابتدا تابع $g \circ f^{-1}$ را به دست می‌آوریم:

$$f^{-1} = \{(2, 1), (5, 2), (4, 3), (6, 4)\}$$

$$g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$$

$$g \circ f^{-1} = \{(5, 3), (4, 1), (6, 2)\}$$

تابع $g \circ f^{-1}$ را اگر h بنامیم باید تابع $\frac{g}{h}$ را حساب کنیم که از آنجا که $h \neq 0$

است، دامنه این تابع $D_g \cap D_h$ است. پس:

$$\frac{g}{h} = \{(5, \frac{6}{3}), (4, \frac{1}{1})\} = \{(5, 2), (4, 1)\}$$



برای محاسبه برد تابع f می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم. (که البته در این سؤال لازم به محاسبه برد با توجه به گزینه‌ها نبود!)

$$y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow \underbrace{y - x = \sqrt{x^2 + 1}}_{(1)}$$

$$\xrightarrow{y > x} (y - x)^2 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow y^2 - 2xy + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow 2xy = y^2 - 1 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 1}{2y}$$

از طرفی طبق شرط (*) باید $y > x$ باشد در غیر این صورت دو طرف رابطه (۱) مختلف‌العلامت خواهند بود. پس باید:

$$x < y \Rightarrow \frac{y^2 - 1}{2y} < y \Rightarrow \frac{y^2 - 1}{2y} - y < 0$$

$$\xrightarrow{\frac{y^2 - 1}{2y}} \frac{y^2 - 1 - 2y^2}{2y} < 0 \Rightarrow \frac{-y^2 - 1}{2y} < 0$$

$$\xrightarrow{-y^2 - 1 < 0} y > 0$$

پس برد تابع f بازه $(0, +\infty)$ است.

۹۷۷-۳ می‌دانیم $f^{-1} \circ f(x) = x$ ؛ پس:

$$g(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{2-x} - f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{2-x} - x$$

$$= \sqrt{x} - \sqrt{2-x}$$

در نتیجه باید:

$$x - \sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{2-x} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2} x^2 \geq 2-x$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow 1 \leq x \text{ یا } x \leq -2$$

$$\xrightarrow{0 \leq x \leq 2} 1 \leq x \leq 2$$

اعضای صحیح دامنه ۱ و ۲ هستند که مجموع آن‌ها ۳ است.

۹۷۸-۲ راه اول: اگر توابع f و g معکوس یکدیگر باشند به ازای هر $x \in D_g$ داریم $f \circ g(x) = x$ و به ازای هر $x \in D_f$ داریم $g \circ f(x) = x$ ؛ پس معکوس تابع f را به دست می‌آوریم و با تابع g برابر قرار می‌دهیم:

$$y = \frac{3x+2}{x-1} \Rightarrow 3x+2 = xy-y$$

$$\Rightarrow 3x-xy = -y-2 \Rightarrow x(3-y) = -y-2$$

$$\Rightarrow x = \frac{-y-2}{3-y} = \frac{y+2}{y-3}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-3} \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-3} \\ g(x) = \frac{x+2}{x+a} \end{cases} \Rightarrow a = -3$$

راه دوم: تابع $f \circ g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = \frac{\frac{3x+2}{x+a} + 2}{\frac{3x+2}{x+a} - 1} = \frac{\frac{3x+2+2x+2a}{x+a}}{\frac{3x+2-x-a}{x+a}} = \frac{5x+6+2a}{2-a}$$

$$\xrightarrow{f \circ g(x) = x} \frac{5x+6+2a}{2-a} = x$$

$$\Rightarrow \frac{5x+6+2a}{2-a} = x \Rightarrow \begin{cases} 2-a = 5 \\ 6+2a = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = -3$$

اگر $f^{-1}(2) = \alpha$ باشد $f(\alpha) = 2$ است، پس:

$$f(\alpha) = -\frac{2}{3}\alpha + 2 = 2 \Rightarrow -\frac{2}{3}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow f^{-1}(2) = 0$$

۹۷۳-۴ می‌دانیم $f \circ f^{-1}(x) = x$ است به طوری که $D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = D_f$

و $f^{-1} \circ f(x) = x$ است به طوری که $D_{f^{-1} \circ f} = D_f$ ؛ پس توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ هر دو همانی هستند اما دامنه آن‌ها الزاماً یکسان نیست:

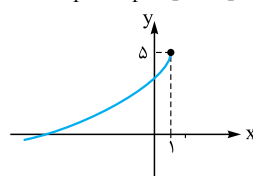
$$\begin{cases} D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}} = R_f \\ D_{f^{-1} \circ f} = D_f \end{cases}$$

پس نمودار این توابع در بازه‌هایی که D_f و R_f اشتراک داشته باشند بر هم منطبق است.

$$f(x) = 2 - \sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} D_f = [-1, +\infty) \\ R_f = (-\infty, 2] \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f \cap R_f = [-1, 2]$$

۹۷۴-۱ ابتدا دامنه و برد تابع f را می‌نویسیم:



$$f(x) = 5 - \sqrt{1-x} \Rightarrow \begin{cases} D_f = (-\infty, 1] \\ R_f = (-\infty, 5] \end{cases}$$

حال دامنه g را حساب می‌کنیم:

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid 2-3x \in D_{f^{-1}} = R_f\} \Rightarrow 2-3x \leq 5$$

$$\xrightarrow{(-\infty, 5]} -3 \leq 3x \Rightarrow -1 \leq x \Rightarrow D_g = [-1, +\infty)$$

$$\Rightarrow -3 \leq 3x \Rightarrow -1 \leq x \Rightarrow D_g = [-1, +\infty)$$

در نتیجه:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} x \leq 1 & 5 - \sqrt{1-x} & [-1, +\infty) \end{matrix}} \Rightarrow 5 - \sqrt{1-x} \geq -1 \Rightarrow \sqrt{1-x} \leq 6 \Rightarrow 1-x \leq 36$$

$$\Rightarrow 5 - \sqrt{1-x} \geq -1 \Rightarrow \sqrt{1-x} \leq 6 \Rightarrow 1-x \leq 36$$

$$\Rightarrow -35 \leq x \xrightarrow{x \leq 1} D_{g \circ f} = [-35, 1]$$

پس دامنه $g \circ f$ شامل ۳۷ عدد صحیح است.

۹۷۵-۱ توابع $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ توابعی همانی هستند که دامنه $f \circ f^{-1}$ برابر $R_f = D_{f^{-1}}$ است. ولی دامنه $f^{-1} \circ f$ برابر D_f است.

پس ابتدا برد تابع f را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = 2x+1 \xrightarrow{\text{چون } f \text{ خطی است}} R_f = [-1, 9]$$

$$D_f = [-1, 4]$$

$$D_{f \circ f^{-1}} = R_f = [-1, 9]$$

$$D_{f^{-1} \circ f} = D_f = [-1, 4]$$

از طرفی می‌دانیم دامنه تابع $h \pm g$ برابر $D_h \cap D_g$ است. پس:

$$D_{h-g} = D_h \cap D_g = [-1, 4] \cap [-1, 9] = [-1, 4]$$

۹۷۶-۲ می‌دانیم $f \circ f^{-1}(x) = x$ است که دامنه آن $D_{f \circ f^{-1}}$ است.

از طرفی می‌دانیم $D_{f^{-1}} = R_f$ است. پس $f \circ f^{-1}$ یک تابع همانی است که دامنه آن همان برد تابع f است.

چون $\sqrt{x^2+1} > |x|$ است پس تابع f مقادیر منفی نمی‌تواند ایجاد کند پس

۱، ۳ و ۴ نادرست‌اند. در نتیجه ۲ صحیح است.



$f \circ g$ تابعی اکیداً صعودی است (زیرا ترکیب دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی است). پس معکوس خود را روی خط $y = x$ قطع می کند، پس باید معادله زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) = x &\Rightarrow (4 + 3\sqrt[3]{\sqrt{x} - 2})^3 = x \\ &\Rightarrow 4 + 3\sqrt[3]{\sqrt{x} - 2} = \sqrt[3]{x} \\ &\text{اگر فرض کنیم } \sqrt[3]{x} = t \text{ است، داریم:} \\ 4 + 3\sqrt[3]{t - 2} = t &\Rightarrow 3\sqrt[3]{t - 2} = t - 4 \\ \xrightarrow{\text{توان } 3} 27t - 54 = t^3 - 12t^2 + 48t - 64 & \\ \Rightarrow t^3 - 12t^2 + 27t - 10 = 0 &\Rightarrow \underbrace{(t-1)(t^2 - 11t + 10)}_{(t-1)(t-10)} = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} t=1 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Rightarrow x=1 \\ t=10 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 10 \Rightarrow x=1000 \end{cases} \\ \Rightarrow \text{مجموع ریشه های متمایز} &= 1001 \end{aligned}$$

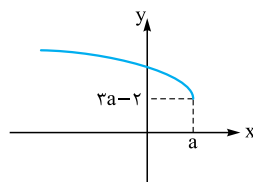
۹۷۹-۱ در تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ (که $ad \neq bc$) اگر

$a = -d$ باشد، $f^{-1}(x) = f(x)$ است. از طرفی به ازای هر $x \in D_f$ داریم $f^{-1} \circ f(x) = x$ در تابع $f(x) = \frac{3x+6}{4x-3}$ چون $a = -d$ است پس $f(x) = f^{-1}(x)$ است و در نتیجه $f \circ f(x)$ برابر $f(x)$ است:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f \circ f(x) = f^{-1} \circ f(x) = x \\ f(x) = f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(3x) = f(3x) \end{cases} \\ \Rightarrow f \circ f(x) + f^{-1}(3x) = x + f(3x) &\Rightarrow x + f(3x) = x \\ \Rightarrow f(3x) = 0 &\Rightarrow f(3x) = \frac{9x+6}{12x-3} = 0 \Rightarrow 9x+6 = 0 \\ \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

۹۸۰-۳ می دانیم:

$$\begin{cases} f \circ f^{-1}(x) = x, & x \in D_{f^{-1}} = R_f \\ f^{-1} \circ f(x) = x, & x \in D_f \end{cases}$$



زمانی $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ برابرند که $D_f = R_{f^{-1}}$ باشد. اگر $f(x) = 3a-2 + \sqrt{a-x}$ باشد دامنه و برد آن برابر است با:

$$D_f = (-\infty, a] \quad R_f = [3a-2, +\infty)$$

اگر معادله $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x)$ یک جواب داشته باشد، پس $D_f \cap R_{f^{-1}}$ نیز باید ۱ عضوی باشد؛ پس لازم است $a = 3a-2$ باشد. در نتیجه $a = 1$. اگر α جواب معادله $x + f^{-1}(x) = 0$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha) = -\alpha &\Rightarrow f(-\alpha) = \alpha \\ f(x) = 1 + \sqrt{1-x} &\text{ پس معادله زیر را باید حل کنیم:} \\ f(-\alpha) = \alpha &\Rightarrow 1 + \sqrt{1+\alpha} = \alpha \Rightarrow \sqrt{1+\alpha} = \alpha - 1 \\ \xrightarrow{\alpha \geq 1} \alpha + 1 = \alpha^2 - 2\alpha + 1 &\Rightarrow \alpha^2 - 3\alpha = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 & \text{غ ق ق} \\ \alpha = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

۹۸۱-۲ می دانیم $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ ؛ پس ابتدا تابع $f \circ g$ را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) = f(g(x)) &= \frac{2 - g^3(x)}{g^3(x) + 3} = \frac{2 - (2x-1)}{(2x-1) + 3} = \frac{-2x+3}{2x+2} \\ \Rightarrow f \circ g(x) &= \frac{-2x+3}{2x+2} \end{aligned}$$

حال معکوس تابع فوق را که همان تابع $g^{-1} \circ f^{-1}$ است، به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} y = \frac{-2x+3}{2x+2} &\Rightarrow -2x+3 = 2xy+2y \\ \Rightarrow 2xy+2x = 3-2y &\Rightarrow x(2y+2) = 3-2y \Rightarrow x = \frac{3-2y}{2y+2} \\ \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(x) &= g^{-1} \circ f^{-1}(x) = \frac{3-2x}{2x+2} \end{aligned}$$

۹۸۲-۲ می دانیم معکوس تابع $f \circ g$ برابر $g^{-1} \circ f^{-1}$ است؛ پس معادله $f \circ g(x) = g^{-1} \circ f^{-1}(x)$ ، محل تلاقی دو تابع معکوس را می خواهد. تابع